EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2016 - 2017

Matematică

Varianta 4

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $3\cdot 10-10$ este egal cu ….

5p **2.** Patru kilograme de mere costă 12 lei. Două kilograme de mere, de acelaşi fel, costă … lei.

5p **3.** Cel mai mare număr natural care aparţine intervalului $[8,15)$ este egal cu ….

5p **4.** Un cerc are raza de $4{,}5$ cm . Lungimea acestui cerc este egală cu $\ldots\pi$ cm .

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDEFGH$ cu $AB=2$ cm . Lungimea diagonalei BH a cubului $ABCDEFGH$ este egală cu … cm .

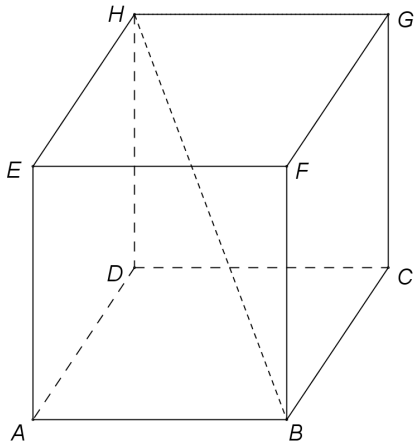
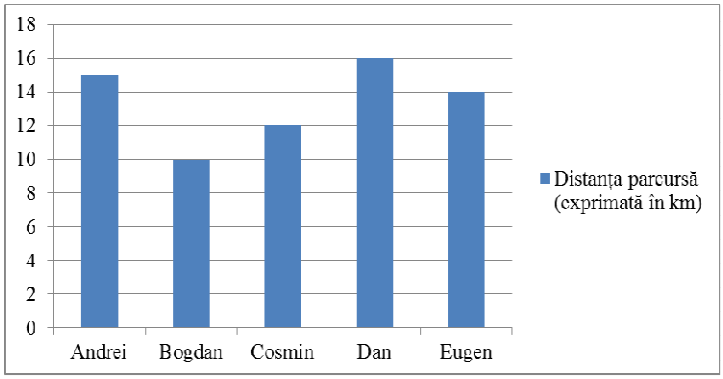


Figura 1

5p **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate distanţele parcurse de cinci alergători, în timpul unui antrenament de o oră.



Conform diagramei, distanţa parcursă de Cosmin este mai mare decât distanţa parcursă de Bogdan cu …km .

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC .

5p **2.** Arătaţi că media aritmetică a numerelor $a=\sqrt{64}$ şi $b=\dfrac{6}{\sqrt{2}}+2-\sqrt{18}$ este egală cu 5.

5p **3.** Un biciclist a parcurs un traseu în două zile. În prima zi biciclistul a parcurs două treimi din lungimea traseului, iar a doua zi a parcurs restul de 15 km . Calculaţi lungimea traseului parcurs de biciclist în cele două zile.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$.

5p **a)** Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

5p **b)** Calculați lungimea segmentului determinat de punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele sistemului de coordonate xOy.

5p **5.** Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}-\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right):\dfrac{4}{x^2-1}$, unde x este număr real, $x\neq -1$ şi $x\neq 1$. Arătați că $E(x)=0$, pentru orice x număr real, $x\neq -1$ şi $x\neq 1$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AD=12\text{cm}$ şi $AC=20\text{cm}$. Punctul M este mijlocul laturii AD, iar punctul N se află pe latura CD astfel încât $DN=4\text{cm}$.

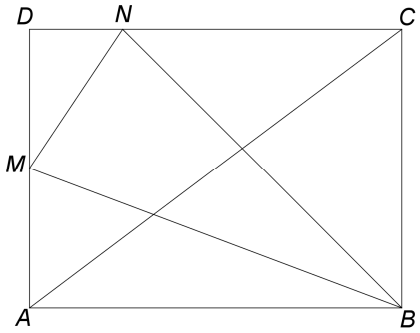


Figura 2

5p **a)** Arătați că $AB=16\text{cm}$.

5p **b)** Arătați că raportul dintre aria triunghiului DMN şi aria triunghiului ABM este egal cu $\dfrac{1}{4}$.

5p **c)** Determinați distanța de la punctul M la dreapta BN.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu $VA=AB=12\text{cm}$. Punctul M este mijlocul muchiei VA şi $AC\cap BD=\{O\}$.

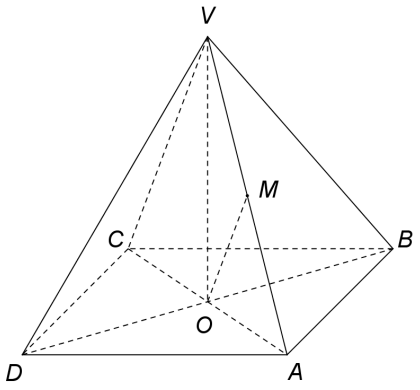


Figura 3

5p **a)** Arătați că aria pătratului $ABCD$ este egală cu 144cm^2.

5p **b)** Arătați că volumul piramidei $VABCD$ este egal cu $288\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

5p **c)** Calculați măsura unghiului determinat de dreptele OM și AB.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2016 - 2017

Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I
- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	20	**5p**
2.	6	**5p**
3.	14	**5p**
4.	9	**5p**
5.	$2\sqrt{3}$	**5p**
6.	2	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează prisma dreaptă Notează prisma dreaptă	**4p** **1p**
2.	$a=8$, $b=3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}=2$ $m_a=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{8+2}{2}=5$	**2p** **3p**
3.	$\dfrac{2}{3}\cdot x+15=x$, unde x este lungimea traseului parcurs în cele două zile $x=45\,\text{km}$	**2p** **3p**
4.	**a)** Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f Trasarea graficului funcţiei f	**2p** **2p** **1p**
	b) $OA=2$, unde A este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox $OB=4$, unde B este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy și cum ΔAOB este dreptunghic, obținem $AB=2\sqrt{5}$	**2p** **3p**
5.	$\dfrac{x^2-x}{x-1}=\dfrac{x(x-1)}{x-1}=x$ $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)}$ $E(x)=x-\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{(x-1)(x+1)}{4}=x-x=0$, pentru orice x număr real, $x\neq-1$ şi $x\neq1$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $AB^2=AC^2-BC^2=$ $=20^2-12^2=256$, deci $AB=16\,\text{cm}$	**2p** **3p**

	b) $\mathcal{A}_{\Delta DMN}=\frac{DM\cdot DN}{2}$, $\mathcal{A}_{\Delta ABM}=\frac{AB\cdot AM}{2}$	**2p**
	Cum $DM=AM$, obținem $\frac{\mathcal{A}_{\Delta DMN}}{\mathcal{A}_{\Delta ABM}}=\frac{DN}{AB}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	**3p**
	c) $\mathcal{A}_{\Delta BNM}=\mathcal{A}_{ABCD}-\left(\mathcal{A}_{\Delta ABM}+\mathcal{A}_{\Delta BCN}+\mathcal{A}_{\Delta DMN}\right)=192-\left(48+72+12\right)=60\,\text{cm}^2$	**2p**
	Cum $\mathcal{A}_{\Delta BNM}=\frac{BN\cdot d\left(M,BN\right)}{2}$ și $BN=12\sqrt{2}\,\text{cm}$, obținem că $d\left(M,BN\right)=5\sqrt{2}\,\text{cm}$	**3p**
2.	**a)** $\mathcal{A}_{ABCD}=AB^2=$	**2p**
	$=12^2=144\,\text{cm}^2$	**3p**
	b) $VO=6\sqrt{2}\,\text{cm}$	**2p**
	$V_{VABCD}=\frac{1}{3}\cdot VO\cdot\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 144=288\sqrt{2}\,\text{cm}^3$	**3p**
	c) OM linie mijlocie în $\Delta ACV\Rightarrow OM\,\|\|\,CV$ și, cum $AB\,\|\|\,CD$, obținem $m\left(\sphericalangle OM,AB\right)=$ $=m\left(\sphericalangle CV,CD\right)=m\left(\sphericalangle DCV\right)$	**2p**
	Triunghiul VDC este echilateral, deci $m\left(\sphericalangle DCV\right)=60°$	**3p**

I.1. Rezultatul calculului $3 \cdot 10 - 10$ este egal cu ...

$3 \cdot 10 - 10 = 30 - 10 = 20 \Rightarrow$ răspuns corect $\boxed{20}$

I.2. Patru kilograme de mere costă 12 lei. Două kilograme de mere, de același fel, costă ... lei

Observăm că ne cere jumătate din cantitate

$12 : 2 = 6$ lei $\Rightarrow$ răspuns corect $\boxed{6}$

I.3. Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $[8;15)$ este egal cu ...

$[8;15) \cap \mathbb{N} = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$

Cel mai mare număr natural este 14

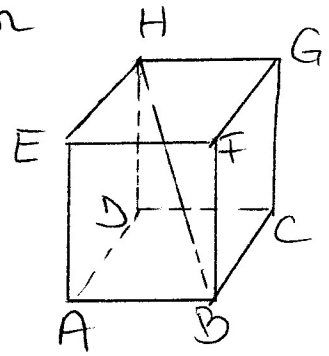
răspuns corect $\boxed{14}$

I.4. Un cerc are raza de 4,5 cm. Lungimea acestui cerc este egală cu ... π cm

$\mathcal{L}_{cerc} = 2\pi R = 2 \cdot 4{,}5 \cdot \pi = 9\pi$ cm

răspuns corect [9]

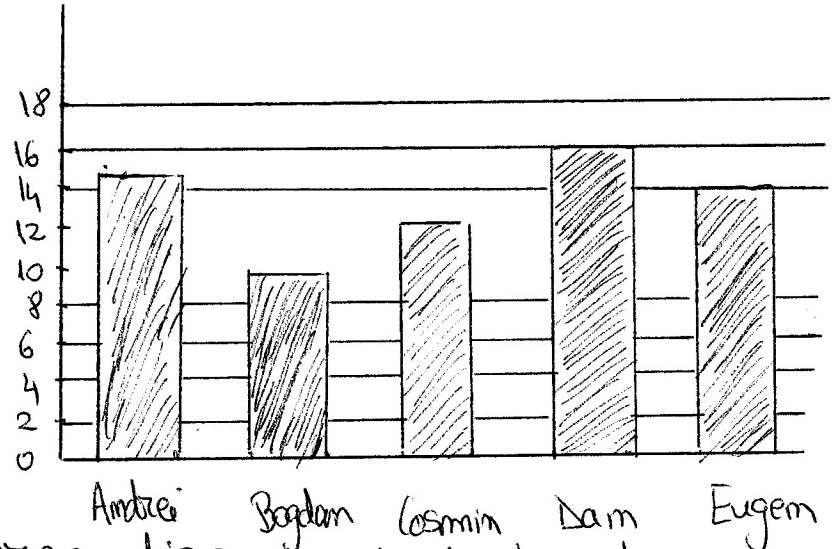
I.5. În figura 1 este reprezentat un cub ABCDEFGH cu AB = 2 cm. Lungimea diagonalei BH a cubului ABCDEFGH este egală cu ... cm



$d_{cub} = \ell\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm

⇒ răspuns corect [$2\sqrt{3}$]

I.6. În diagrama de mai jos sunt prezentate distanțele parcurse de cinci alergători, în timpul unui antrenament de o oră



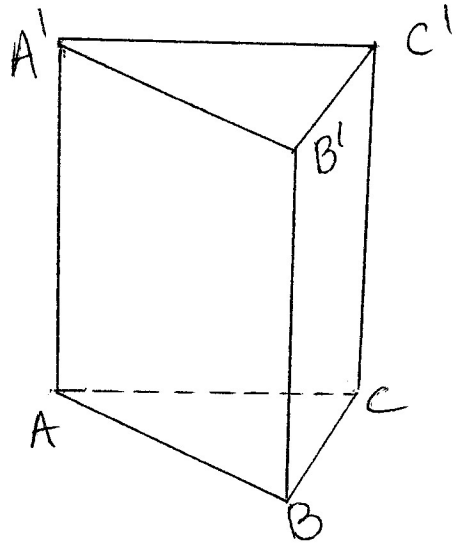
Conform diagramei, distanța parcursă de Cosmin este mai mare decât distanța parcursă de Bogdan cu ... km

Distanța parcursă de Cosmin: 12 km

Distanța parcursă de Bogdan: 10 km

12 − 10 = 2 km ⇒ răspuns corect [2]

II.1. Desemați pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC



II.2 Arătați că media aritmetică a numerelor $a=\sqrt{64}$ și $b=\frac{6}{\sqrt{2}}+2-\sqrt{18}$ este egală cu 5.

E1) $a=\sqrt{64}=8$; $b=\frac{6}{\sqrt{2}}+2-\sqrt{18}$

$18|2$
$9|3$
$3|3$
1

$\Rightarrow b=\frac{3\sqrt{2}}{1}+2-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}=2$

E2) $m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{8+2}{2}=\frac{10}{2}=5$

II.3. Un biciclist a parcurs un traseu în două zile. În prima zi biciclistul a parcurs două treimi din lungimea traseului, iar a doua zi restul de 15 km. Calculați lungimea traseului parcurs de biciclist în cele două zile.

E1) Notăm întreg traseul cu x

E2) $I_{zi}: \frac{2}{3}\cdot x=\frac{2x}{3}$; $II_{zi}: 15$ km

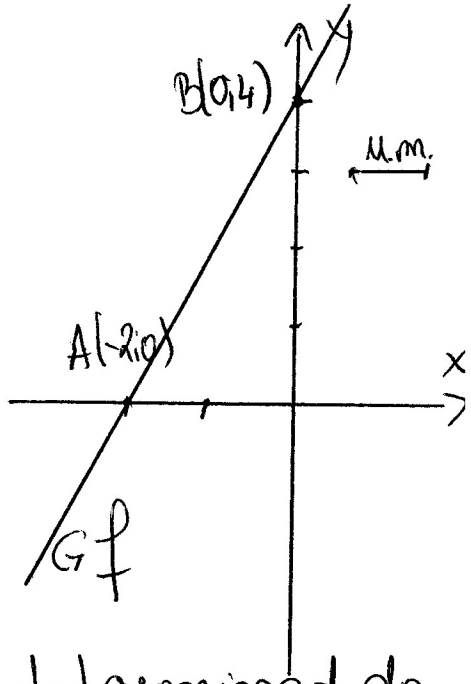
E3) Întreg traseul este format din cele două zile

$I_{zi}+II_{zi}=x \Rightarrow \frac{2x}{3}+15=x \quad /\cdot 3$

$2x+45=3x \Rightarrow 3x-2x=45 \Rightarrow x=45$ km

II.4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$

a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.



E1) $\cap Ox \Rightarrow y=0 \Rightarrow f(x)=0$

$\Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$

$A(-2;0)$

$\cap Oy \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=2\cdot 0+4=4$

$\Rightarrow B(0;4)$

E2) Trasarea graficului

b) Calculați lungimea segmentului determinat de punctele de intersecție a Gf cu axele de coordonate

E1) $A(-2;0)\in Gf \Rightarrow OA=2$

$B(0;4)\in Gf \Rightarrow OB=4$

E2) Cu T.P. în ΔAOB dr $\Rightarrow AB^2=OA^2+OB^2$

$AB^2=4+16 \Rightarrow AB^2=20 \Rightarrow AB=2\sqrt{5}$

II.5. Se consideră expresia $E(x)=\frac{x^2-x}{x-1}-\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right):\frac{4}{x^2-1}$

unde x este număr real, $x\neq -1$, $x\neq 1$. Arătați că $E(x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

E1) $\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}=x$

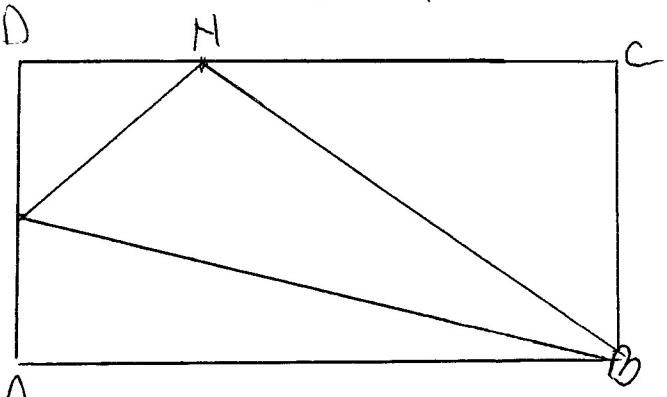
E2) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{4x}{(x+1)(x-1)}$

E3) $E(x)=x-\frac{4x}{(x+1)(x-1)}:\frac{4}{(x-1)(x+1)}$

$E(x)=x-\frac{4x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{4x}\Rightarrow E(x)=x-x=0$

III.1 În figura 2 este reprezentat un dreptunghi ABCD cu $AD=12cm$, $AC=20cm$. M - mij. AD, $N \in (CD)$ astfel încât $DN=4cm$.



a) Arătați că $AB=16cm$

Cum ABCD dreptunghi $\Rightarrow AD=BC$

Cu TP în $\triangle ABC \Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2$

$\Rightarrow AB^2=400-144 \Rightarrow AB^2=256$

$\Rightarrow AB=16cm$

b) Arătați că raportul dintre aria $\triangle DMN$ și aria $\triangle ABM$ este $\frac{1}{4}$

E1) M - mij AD $\Rightarrow MD=AM=6cm$

E2) $A_{\triangle DMN}=\frac{C_1 \cdot C_2}{2}=\frac{DM \cdot ND}{2}=\frac{4 \cdot 6}{2}=12cm^2$

E3) $A_{\triangle MAB}=\frac{C_1 \cdot C_2}{2}=\frac{MA \cdot AB}{2}=\frac{6 \cdot 16}{2}=48cm^2$

E4) $\frac{A_{\triangle DMN}}{A_{\triangle MAB}}=\frac{12\,cm^2}{48\,cm^2}=\frac{1}{4}$

c) Determinați distanța de la M la BN

E1) $A_{\triangle MNB}=A_{ABCD}-(A_{DMN}+A_{MAB}+A_{NCB})$

E2) $A_{ABCD}=L \cdot l=16 \cdot 12=192cm^2$

$A_{NBC}=\frac{12 \cdot 12}{2}=72\,cm^2$

$\Rightarrow A_{MNB}=192-(48+72+12)=60cm^2$

E3) distanța de la un punct la o dreaptă reprezintă perpendiculara dusă din pct pe dreaptă

E4) Cu TP în $\triangle NCB$-dr $\Rightarrow NB^2=NC^2+BC^2 \Rightarrow NB^2=\sqrt{288}$

$\Rightarrow NB^2=12\sqrt{2}\,cm$

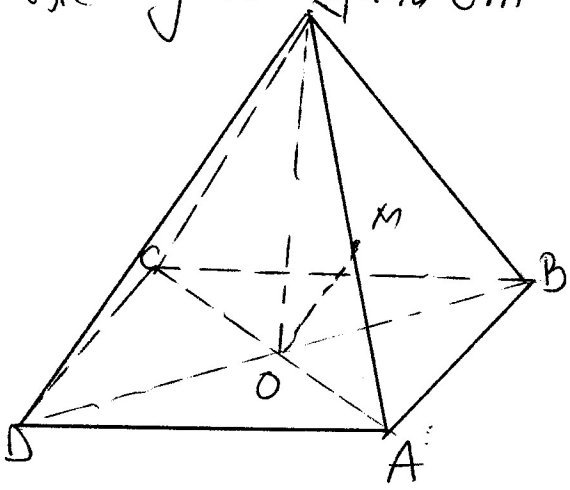
E5) $A_{\triangle MNB}=\frac{NB \cdot d(M;BN)}{2} \Rightarrow 60=\frac{12\sqrt{2} \cdot d(M;BN)}{2}$

$\Rightarrow 120=12\sqrt{2}\,d(M;BN) \Rightarrow d(M;BN)=5\sqrt{2}\,cm$

III.2. În figura 3 este reprezentată o piramidă patrulateră regulată VABCD cu VA=AB=12cm. Punctul M - mijlocul lui VA și AC ∩ BD = {O}

a) Arătați că aria pătratului ABCD este egală cu 144 cm²

$A_{ABCD} = l^2 = AB^2 = 12^2 = 144 cm^2$



b) Arătați că volumul piramidei VABCD este egal cu $288\sqrt{2}\ cm^3$

E1) $V_{VABCD} = \frac{A_b \cdot h}{3}$

E2) $VO \perp (ABCD)$, $OA \subset (ABC)$ $\Rightarrow \Delta VOA$ dr, $m(\sphericalangle VOA) = 90°$

E2) $OA = \frac{d}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ cm$

E3) Cu TP în ΔVAO, $VA^2 = VO^2 + OA^2 \Rightarrow 12^2 = VO^2 + (6\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow VO^2 = 144 - 72 \Rightarrow VO^2 = 72 \Rightarrow VO = 6\sqrt{2}\ cm$

$\Rightarrow V_{VABCD} = \frac{144 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = 288\sqrt{2}\ cm^3$

c) Calculați măsura unghiului determinat de dreptele OM și AB

E1) O - mij lui AC, M - mij lui VA $\Rightarrow$ OM - l.m în Δ VAC $\Rightarrow OM \parallel VC$

E2) $AB \parallel DC$ (ABCD pătrat)

E3) $\Rightarrow m(\sphericalangle(OM; AB)) = m(\sphericalangle(VC; DC)) = m(\sphericalangle DCV)$

E4) Cum $VD = VC = DC = 12cm \Rightarrow \Delta VCD$ echilateral

$\Rightarrow m(\sphericalangle VCD) = 60°$