**EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a**
**Anul școlar 2016 - 2017**
**Matematică**

**Simulare**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

**SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele.** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Rezultatul calculului $9-36:(4+5)$ este egal cu ... .

**5p** **2.** Dacă $x$ și $y$ sunt numere reale nenule astfel încât $\frac{x}{3}=\frac{4}{y}$, atunci $\frac{xy}{12}$ este egal cu ... .

**5p** **3.** Produsul numerelor întregi din intervalul $[-3,2]$ este egal cu ... .

**5p** **4.** Lungimea unui cerc este egală cu $100\pi$ cm . Raza acestui cerc este egală cu ... cm .

**5p** **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=6$ cm. Perimetrul triunghiului $ACD'$ este egal cu … cm.

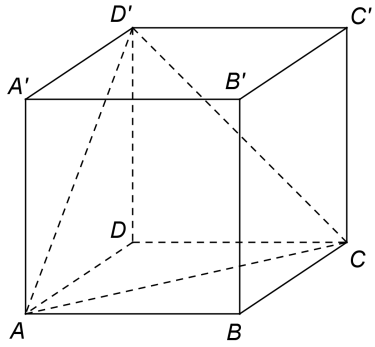
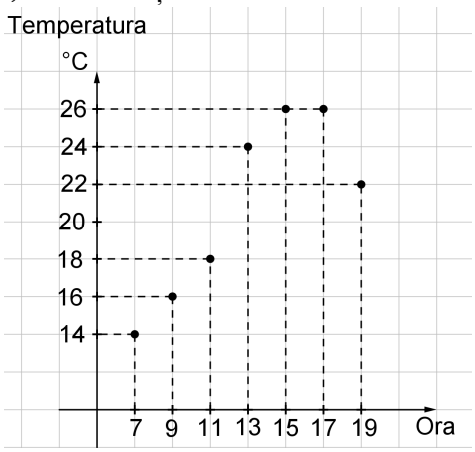



*Figura 1*

**5p** **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate valorile temperaturilor înregistrate la o stație meteo, din două în două ore pe parcursul unei zile, între ora 7 și ora 19.




Conform diagramei, diferența dintre temperatura înregistrată la ora 17 și temperatura înregistrată la ora 7 este egală cu ... ºC.

**SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată cu vârful $V$ și baza triunghiul $ABC$ .

**5p** **2.** Determinați numerele întregi $x$ pentru care numărul $\frac{13}{x-7}$ este natural.

**5p** **3.** Suma a două numere naturale este egală cu 280. Determinați cele două numere, știind că o treime din primul număr este egală cu o pătrime din al doilea număr.

**5p** **4. a)** Arătați că $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}=4$ .

**5p** **b)** Calculați media geometrică a numerelor $a=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$ și $b=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$.

**5p** **5.** Se consideră $E=x^2+y^2-2xy-3x-3y+2(2xy+3)$, unde $x$ și $y$ sunt numere reale. Știind că $x+y=5$, arătați că $E=16$.

**SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)**

**1.** În *Figura 2* este reprezentat un triunghi dreptunghic $ABC$ cu $m(\sphericalangle BAC)=90^\circ$, $AB=9\text{cm}$ și $AC=12\text{cm}$. Punctele $M$ și $N$ aparțin laturii $BC$, punctul $Q$ aparține laturii $AB$ și punctul $P$ aparține laturii $AC$, astfel încât $BM=MN=NC=MQ=NP$.

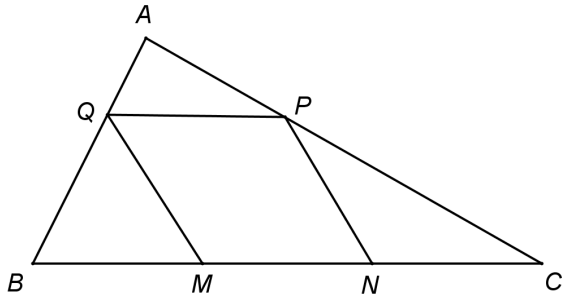



*Figura 2*

**5p** **a)** Arătați că perimetrul triunghiului $ABC$ este egal cu $36\text{cm}$.

**5p** **b)** Arătați că aria triunghiului $PMC$ este egală cu $24\text{cm}^2$.

**5p** **c)** Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este romb.

**2.** În *Figura 3* este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu $AB=4\text{cm}$. Pe planul pătratului $ABCD$ se construiesc perpendicularele $AE$ și $CF$ astfel încât $AE=2\sqrt{6}\text{cm}$ și $CF=2\sqrt{2}\text{cm}$.

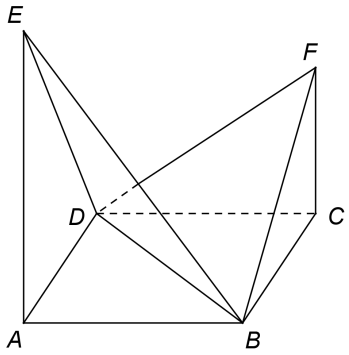



*Figura 3*

**5p** **a)** Arătați că $AC=4\sqrt{2}\text{cm}$.

**5p** **b)** Arătați că aria triunghiului $FBD$ este egală cu $8\sqrt{2}\text{cm}^2$.

**5p** **c)** Demonstrați că unghiul dintre planele $(EBD)$ și $(FBD)$ are măsura egală cu $75^\circ$.

**EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a**
**Anul școlar 2016 - 2017**
**Matematică**
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Simulare**

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I**

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

**SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea**

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | 5 | **5p** |
| **2.** | 1 | **5p** |
| **3.** | 0 | **5p** |
| **4.** | 50 | **5p** |
| **5.** | $18\sqrt{2}$ | **5p** |
| **6.** | 12 | **5p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | Desenează piramida triunghiulară regulată | **4p** |
| | Notează piramida triunghiulară regulată | **1p** |
| **2.** | Cum $x-7$ este număr întreg, $\frac{13}{x-7}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x-7=1$ sau $x-7=13$ | **3p** |
| | $x=8$ sau $x=20$ | **2p** |
| **3.** | $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{a+b}{7}=\frac{280}{7}=40$, unde $a$ și $b$ sunt cele două numere | **3p** |
| | $a=120$ și $b=160$ | **2p** |
| **4.** | **a)** $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}+\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{2}}{1}+\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=$ | **3p** |
| | $=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$ | **2p** |
| | **b)** $a\cdot b=\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\right)^2=4$ | **3p** |
| | $m_g=\sqrt{a\cdot b}=2$ | **2p** |
| **5.** | $E=x^2+y^2+2xy-3(x+y)+6=(x+y)^2-3(x+y)+6=$ | **3p** |
| | $=5^2-3\cdot5+6=16$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $BC^2=AB^2+AC^2=9^2+12^2=225$, deci $BC=15\text{cm}$ | **3p** |
| | $P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=9+12+15=36\text{cm}$ | **2p** |
| | **b)** $PN$ mediană în $\Delta PMC$ și, cum $PN=\frac{MC}{2}$, obținem $\Delta PMC$ dreptunghic în $P$ | **2p** |
| | $PM\parallel AB\Rightarrow\Delta PMC\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{PM}{AB}=\frac{MC}{BC}=\frac{PC}{AC}$, deci $PM=6\text{cm}$ și $PC=8\text{cm}$, de unde obținem $\mathcal{A}_{\Delta PMC}=\frac{PM\cdot PC}{2}=24\text{cm}^2$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| | **c)** $QM$ mediană în $\Delta QBN$ și $QM=\frac{BN}{2}$, deci $\Delta QBN$ dreptunghic în $Q\Rightarrow NQ\perp AB$ și, cum $AB\perp AC$ și $MP\perp AC$, obținem $MP\perp NQ$ | **2p** |
| | Cum $\Delta QMN$ este isoscel și $MP\perp NQ$, obținem că punctul $O$ este mijlocul lui $NQ$, unde $\{O\}=MP\cap NQ$ și, cum $\Delta MNP$ este isoscel și $MP\perp NO$, punctul $O$ este mijlocul lui $MP$, deci $MNPQ$ este romb | **3p** |
| **2.** | **a)** $AC^2=AB^2+BC^2=$ | **2p** |
| | $=16+16=32$, deci $AC=4\sqrt{2}$ cm | **3p** |
| | **b)** $FC\perp(ABC)$, $CB, CD\subset(ABC)\Rightarrow FC\perp CB$ și $FC\perp CD$, de unde $\Delta FCB\equiv\Delta FCD$, deci $\Delta FBD$ este isoscel, de unde obținem $FO\perp BD$, unde $\{O\}=AC\cap BD$ | **2p** |
| | $\Delta FCO$ este dreptunghic, deci $FO=4$cm, de unde obținem $\mathcal{A}_{\Delta FBD}=\frac{4\sqrt{2}\cdot 4}{2}=8\sqrt{2}$ cm$^2$ | **3p** |
| | **c)** $EA\perp(ABC)$, $AO\perp BD$, $AO, BD\subset(ABC)\Rightarrow EO\perp BD$ | **1p** |
| | Cum $(EBD)\cap(FBD)=BD$, $EO\perp BD$, $EO\subset(EBD)$ și $FO\perp BD$, $FO\subset(FBD)$, obținem $m(\sphericalangle((EBD),(FBD)))=m(\sphericalangle(EO,FO))$ | **1p** |
| | $\Delta FCO$ dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle FOC)=45^\circ$ și $\Delta EAO$ dreptunghic cu $AO=\frac{1}{2}OE$, deci $m(\sphericalangle EOA)=60^\circ$, de unde obținem $m(\sphericalangle(EO,FO))=m(\sphericalangle EOF)=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$ | **3p** |

I.1. Rezultatul calculului $9-36:(4+5)$ este egal cu...

$9-36:(4+5) = 9-36:9 = 9-4 = 5$

$\Rightarrow$ răspuns corect [5]

I.2. Dacă $x$ și $y$ sunt numere reale nenule astfel încât $\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$, atunci $\frac{xy}{12}$ este egal cu...

$\frac{x}{3} = \frac{4}{y} \Rightarrow x \cdot y = 3 \cdot 4 \Rightarrow xy = 12$

Înlocuim în $\frac{xy}{12} = \frac{12}{12} = 1$

răspuns corect [1]

I.3. Produsul numerelor întregi din intervalul $[-3;2]$ este egal cu...

$[-3;2] \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

produsul: $(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$

$\Rightarrow$ răspuns corect [0]

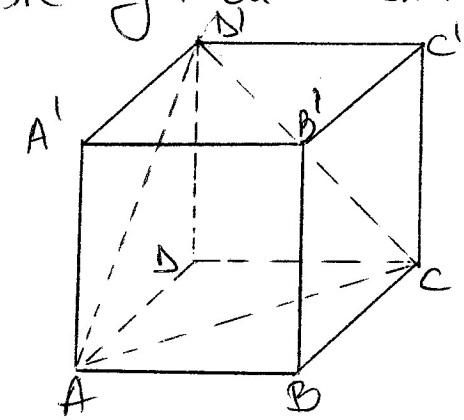
I.4. Lungimea unui cerc este egală cu $100\pi$ cm. Raza acestui cerc este egală cu ... cm

$L_{cerc} = 2\pi R \Rightarrow 100\pi = 2\pi R$

$\Rightarrow R = \frac{100\pi}{2\pi} = 50$ cm

$\Rightarrow$ răspuns corect 50

I.5. În figura 1 este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm. Perimetrul $\triangle ACD'$ este egal cu ... cm




$P_{\triangle ACD'} = AC + CD' + AD'$

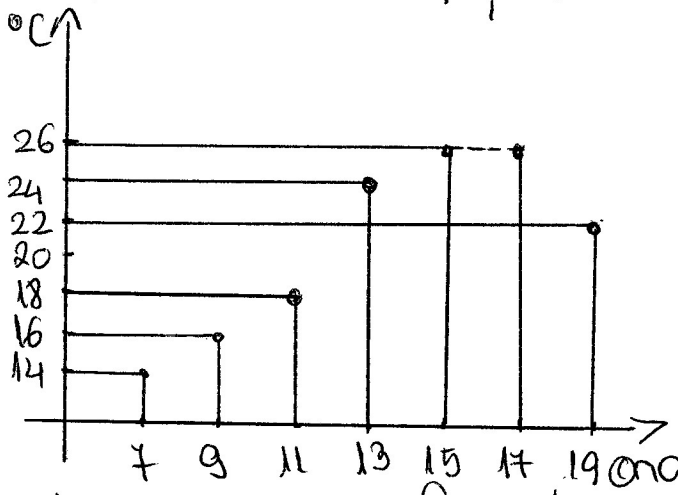
$AC$ - diagonală în pătrat

$\Rightarrow AC = 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm

$P_{\triangle ACD'} = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ cm

$\Rightarrow$ răspuns corect $18\sqrt{2}$

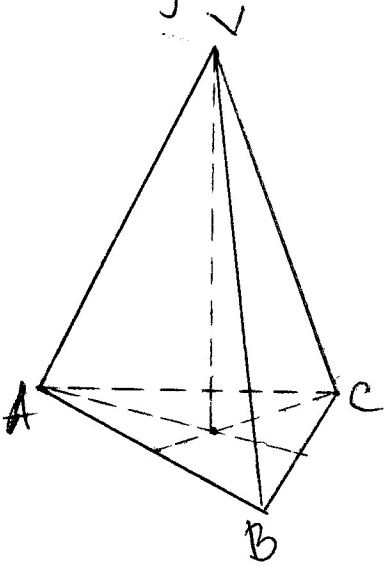
I.6 În diagrama de mai jos sunt prezentate valorile temperaturilor înregistrate la o stație meteo, din două în două ore pe parcursul unei zile, între ora 7 și ora 19




Conform diagramei, diferența dintre temperatura înregistrată la ora 17 și temperatura înregistrată la ora 7 este egală cu ... °C

temperatura ora 17: 26°C
temperatura ora 7: 14°C
$\Rightarrow$ diferența $26 - 14 = 12°$
$\Rightarrow$ răspuns corect 12

II.1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V și baza ABC




Obs1. Se duc medianele punctat pentru a găsi locul de unde se ridică înălțimea

II.2. Determinați numerele întregi x pentru care numărul $\frac{13}{x-7}$ este natural

E1) $x-7 \in D_{13} \Rightarrow x-7 \in \{1; 13\}$

E2) $x-7=1 \Rightarrow x=8$

$x-7=13 \Rightarrow x=20$

II.3. Suma a două numere naturale este egală cu 280. Determinați cele două numere, știind că o treime din primul număr este egal cu o pătrime din al doilea număr.

E1) Notăm numerele cu a, b

E2) $a+b=280$, $\frac{1}{3}\cdot a = \frac{1}{4}\cdot b \Rightarrow \frac{a}{3}=\frac{b}{4}$

E3) Din $a+b=280 \Rightarrow a=280-b$

E4) Înlocuim în $\frac{a}{3}=\frac{b}{4} \Rightarrow \frac{280-b}{3}=\frac{b}{4}$

$4(280-b)=3b$

$1120-4b=3b \Rightarrow 3b+4b=1120 \Rightarrow 7b=1120$

$b=\frac{1120}{7}=160 \Rightarrow a=280-160=120$

II. 4. a) Arătați că $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = 4$

E1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} = 2+\sqrt{2}$

E2) $\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}$

E3) $\Rightarrow 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$ (A)

b) Calculați media geometrică a numerelor $a = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ și $b = (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

E1) $a = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{15}+3$

$\Rightarrow a = 8+2\sqrt{15}$

E2) $b = (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5-2\sqrt{15}+3$

$\Rightarrow b = 8-2\sqrt{15}$

E3) $mg = \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{(8+2\sqrt{15})(8-2\sqrt{15})} = \sqrt{64-60} = \sqrt{4} = 2$

II. 5. Se consideră $E = x^2+y^2-2xy-3x-3y+2(2xy+3)$ unde $x, y \in \mathbb{R}$. Știind că $x+y=5$, arătați că $E=16$

E1) $E = x^2+y^2-2xy-3x-3y+2(2xy+3)$

$E = x^2+y^2-2xy-3x-3y+4xy+6$

$E = x^2+y^2+2xy-3x-3y+6$

E2) Observăm că $x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$

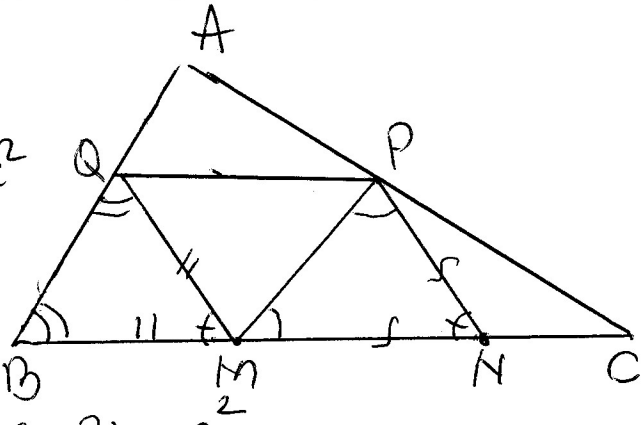
$-3x-3y = -3(x+y)$

E3) $E = (x+y)^2-3(x+y)+6$

$E = 5^2-3\cdot 5+6 \Rightarrow E = 25-15+6 \Rightarrow E = 10+6$

$\Rightarrow E = 16$

III. 1. În figura 2 este reprezentat un triunghi dreptunghic cu $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, $AB = 9cm$, $AC = 12cm$. Punctele $M, N \in (BC)$, punctul $Q \in (AB)$, $P \in (AC)$ astfel încât $BM = MN = NC = MQ = NP$.




a) Arătați că $P_{\Delta ABC}$ este 36 cm

Cum $\Delta ABC$ - dr, cu TP $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = \sqrt{81+144} \Rightarrow BC = 15cm$

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$

$= 9 + 15 + 12$

$= 36 cm$

b) Arătați că $A_{\Delta PMC}$ este egală cu $24 cm^2$

E1) Cum $BM = MN = NC \Rightarrow MN = NC = 5cm$

E2) Dar $PN = NC = 5cm \Rightarrow PN = \frac{MC}{2} \Rightarrow$ mediana este jum. din $MC \Rightarrow \Delta MPC$ - dr

E3) Cum $m(\sphericalangle MPC) = m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ \Rightarrow MP \parallel BA$

E4) $MP \parallel BA \Rightarrow \Delta MPC \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{MP}{BA} = \frac{MC}{BC} = \frac{PC}{AC}$

$\frac{MP}{9} = \frac{10}{15} \Rightarrow MP = \frac{9 \cdot 10}{15} \Rightarrow MP = 6cm$

$\frac{MP}{AB} = \frac{PC}{AC} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{PC}{12} \Rightarrow PC = \frac{6 \cdot 12}{9} = 8cm$

E5) $A_{\Delta MPC} = \frac{c_1 c_2}{ip} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 cm^2$

c) Demonstrați că patrulaterul MNPQ romb

E1) Cum $NP = MN = 5 cm \Rightarrow \Delta MNP$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle NPM \equiv \sphericalangle PMN$

E2) Cum $\Delta BMQ$ isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle MQB) = m(\sphericalangle MBQ)$

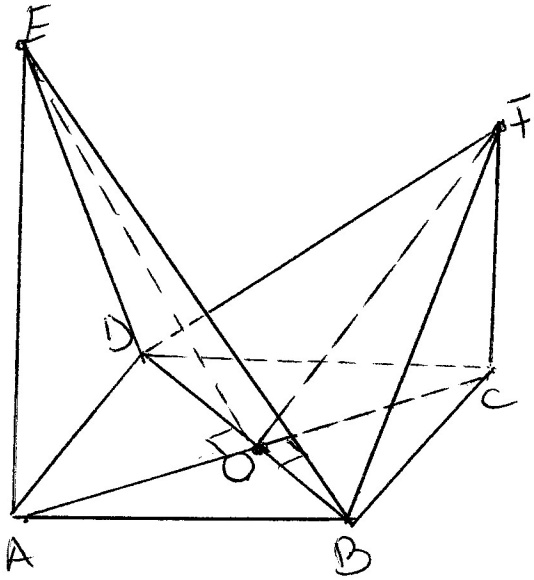
E3) $MP \parallel AB$, BC secantă $\Rightarrow m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle PMC)$

E4) Obținem $\sphericalangle BMQ \equiv \sphericalangle MNP \Rightarrow NP \parallel QM$, $NP = QM \Rightarrow$

$\Rightarrow MNPQ$ paralelogram

E5) Dar MN, PN concurente consecutive $\Rightarrow MNPQ$ romb

III. 2. În figura 3 este reprezentat un pătrat ABCD cu $AB = 4$ cm. Pe planul pătratului ABCD se construiesc perpendicularele AE și CF astfel încât $AE = 2\sqrt{6}$ cm și $CF = 2\sqrt{2}$ cm.




a) Arătați că $AC = 4\sqrt{2}$ cm

Cum AC diagonală în pătrat

$\Rightarrow AC = e\sqrt{2} \Rightarrow 4\sqrt{2}$ cm

b) Arătați că $A_{\Delta FBD}$ este $8\sqrt{2}$ cm$^2$

E1) $DB = e\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm

E2) $\left.\begin{array}{l} FC \perp (ABC) \\ CO \perp BD \\ CO, BD \subset (ABC) \end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\Rightarrow} FO \perp BD$

E3) $\left.\begin{array}{l} FC \perp (ABC) \\ CO \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow FC \perp CO \Rightarrow m(\sphericalangle FCO) = 90^\circ$

E4) Cu TP în $\Delta FCO \Rightarrow FO^2 = FC^2 + OC^2$

Dar $OC = \frac{d}{2} = \frac{e\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm

$\Rightarrow FO^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow FO^2 = 8 + 8 \Rightarrow FO = 4$ cm

E5) $A_{\Delta FBD} = \frac{BD \cdot FO}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ cm$^2$

c) Demonstrați că măsura unghiului dintre (EBD) și (FBD) este de $75^\circ$

E1) $(FBD) \cap (EBD) = BD$

E2) $\left.\begin{array}{l} EA \perp (ABC) \\ AO \perp BD \\ AO, BD \subset (ABC) \end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\Rightarrow} EO \perp BD$

$\Rightarrow m(\sphericalangle((EBD),(FBD))) = m(\sphericalangle(FO, EO)) = m(\sphericalangle EOF)$

E3) Cum $FC = OC \Rightarrow \Delta FOC$ - dr isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle COF) = 45^\circ$

E4) $EA \perp (ABC), OA \subset (ABC) \Rightarrow EA \perp OA$

E5) Cu TP în $\Delta EAO \Rightarrow EO^2 = EA^2 + AO^2 \Rightarrow EO^2 = 24 + 8 \Rightarrow EO = 4\sqrt{2}$

E6) Observăm că în $\Delta AEO$, $AO = \frac{OE}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle AOE) = 60^\circ$ (T $30^\circ$ cu)

E7) $m(\sphericalangle EOF) = 180^\circ - m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle FOC) = 75^\circ$