Capitolul I
MULȚIMI

1) Mulţime-colecţie de obiecte ce apar fie prin indicarea acestor elemente, fie prin precizarea unei proprietăţi specifice acestor obiecte.

Exp.1: $A=\{2;3;5\}$

Exp.2: $A=\{x|2x+1=3\}$

Obs.1: obiectele mulţimii se numesc elemente ale mulţimii respective
Obs.2: dacă apar acolade, nu contează ordinea în care apar elementele, fiecare element apărând o singură dată
Exp: $A=\{2;3;5\}$ sau $A=\{3;2;5\}$ este acelaşi lucru

2) Mulţimea vidă - este mulţimea care nu are nici un element, se notează $\varnothing$
Exp.: $A=\{x|2<x \text{ şi } x<1\}$ ne va da $A=\varnothing$

3) Apartenenţa: un element aparţine unei mulţimi dacă acel element este conţinut în mulţimea respectivă, se notează "$\in$"

Exp.: pentru $A=\{2;3;5\}$ avem $2\in A$; $4\notin A$

4) Egalitatea a două mulţimi-două mulţimi sunt egale doar dacă au aceleaşi elemente, indiferent de ordinea în care apar aceste elemente

Exp.: $\{2;4\}=\{4;2\}$

Obs.: $(2;4)\neq(4;2)$

5) Incluziune $A\subset B\Leftrightarrow$ toate elementele lui A sunt în mulţimea B

Exp.: $\{2,4\}\subset\{4,2\}$, $\{2,4\}\subset\{2,4\}$, $\{2,4\}\not\subset\{2\}$

Obs.1: $\varnothing\subset$ orice mulţime
Obs.2: Orice mulţime este inclusă în ea însăşi , $A\subset A, \forall A$ mulţime

6) Submulţime a unei mulţimi - este o mulţime inclusă în mulţimea iniţială

Exp.: Dacă $A=\{2;3;5\}$, atunci exemple de submulţimi ale lui A sunt: {2;3}; {2}; $\varnothing$

Obs.: $\varnothing$ este submulţime a oricărei mulţimi

7) Reuniunea a două mulţimi – este mulţimea formată din elementele comune şi necomune ale acestor mulţimi, puse în indiferent ce ordine, fiecare element apărând o singură dată. Se notează $A\cup B$

Exp.: A = {2;3;5}şi B = {3;4;5} $\Rightarrow A\cup B=\{2,3,4,5\}$

Obs.: în nicio mulţime nu apare de doua ori acelaşi element

8) Intersecţia a două mulţimi –este mulţimea formată din elementele comune ambelor mulţimi, puse în indiferent ce ordine, fiecare element apărând o singură dată. Se notează $A\cap B$

Exp.: $A=\{2,3,5\}$ şi $B=\{3,4,5\}\Rightarrow$ A$\cap$B = {3;5}

Obs.: Se numesc **mulţimi disjuncte** mulţimile care nu au nici un element comun, adică $A\cap B=\varnothing$

9) Diferenţa a două mulţimi –este mulţimea formată din elementele care aparţin primei mulţimi şi nu aparţin celei de-a doua, se notează $A\setminus B$ sau $A-B$

Exp.: $A=\{2,3,5\}$ şi $B=\{3,4,5\}\Rightarrow A\setminus B=\{2\}$

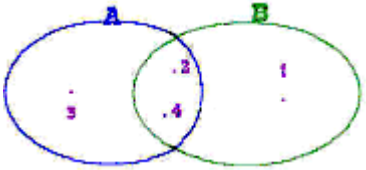
10) Determinarea unor mulţimi: se fac diagrame si se situează elementele în cele două mulţimi.

Obs.1: diagramele se fac ca şi mulţimi care se intersectează, chiar dacă nu se precizează acest lucru.

Obs.2: se foloseşte întâi intersecţia, apoi diferenţa celor două mulţimi şi abia la final reuniunea(căci din reuniune nu ştim exact unde sunt elementele).

Exp.: Determinați mulțimile $A=?, B=?$ astfel încât

$A\cup B=\{1,2,3,4\}$, $A\cap B=\{2;4\}, A\setminus B=\{3\}$



Prima dată punem elementele 2 şi 4 în intersecţie, apoi punem pe 3 în A, abia apoi completăm folosind reuniunea $\Rightarrow$
$A=\{2,3,4\}, B=\{1,2,4\}$

11) Cardinalul unei mulţimi - numărul de elemente din mulţimea respectivă

Exp.: card $\mathbb{N}=\infty$; card $\varnothing=0$

12) Mulţimi finite, mulţimi infinite

mulțime finită - are un număr finit de elemente

mulţime infinită - are un număr infinit de elemente

*Exp.:*mulţimi finite: {3;4;5}; {1}; $\varnothing$

mulţime infinită: $\mathbb{N}$

13) Numere naturale - se notează cu $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;.....\}$,

$\mathbb{N}^*=\{1;2;3;.....\}$, $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$

14) Numere întregi - se notează cu $\mathbb{Z}$ şi

$\mathbb{Z}=\{....;-3;-2;-1;0;1;2;.....\}$, $\mathbb{Z}^*=\{...;-3;-2;-1;1;2;.....\}$, $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

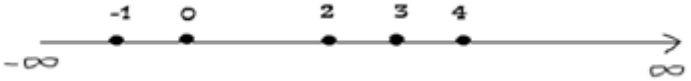
Obs.: opusul unui număr întreg x este $-x$

Exp.: $x=2\Rightarrow$ opusul este -2, iar dacă $x=-5\Rightarrow$ opusul este 5

15) Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor - se trasează axa numerelor, se situează originea, se alege sensul spre infinit, se scriu deaupra numerele respectând unitatea de măsură

Exp.: situați pe axa numerelor numerele întregi ale mulțimii

$M=\{-1;0;2;3;4\}$



16) Compararea și ordonarea numerelor întregi – a compara mai multe numere înseamnă să spunem care din ele este mai mic, sau care este mai mare. Pentru aceasta, trasăm axa numerelor și este mai mic numărul din stânga.

Exp.: Comparați numerele -1 și 3, pe axa numerelor -1 este în stânga lui 3, deci $-1<3$

Obs. : a ordona mai multe numere înseamnă să le scriem în ordine crescătoare sau descrescătoare

17) Aproximarea numerelor întregi, estimare

a) **aprox. prin lipsă** - se păstrează doar cifrele care se cer, restul cifrelor nu se mai scriu

b) **aprox. prin adaos** – ultima cifră care se cere, se măreşte cu o unitate, restul nu se mai scriu

c) estimare – să estimăm aprox ordinul de mărime

Obs.: de obicei, aprox lipsã < numãrul < aprox adaos

Exp.: $n=2317$

aprox. prin lipsă până la zeci este $n=2310$

aprox. prin adaos până la zeci este $n=2320$

aprox. prin lipsă până la sute este $n=2300$

aprox. prin adaos până la sute este $n=2400$

18) Modulul unui număr întreg (se mai numeşte şi **valoarea absolută):** $|a|=\begin{cases}-a, & a<0\\ a, & a\geq 0\end{cases}$

Obs.1: modulul unui număr pozitivează numărul.

Obs.2: modulul unui număr real exprimă distanţa de la acel număr la origine.

Exp.1: $|-3|=3$; deci distanţa de la -3 la origine este 3

Analog pentru numerele: $|2|=2$; $|0|=0$

Obs. 1: $|x|=|y|\Leftrightarrow x=\pm y$

Obs. 2: $|x|\geq 0$

Obs. 3: $|x|+|y|=0\Leftrightarrow x=0$ şi $y=0$

19) Adunarea numerelor întregi: Dacă $a,b\in\mathbb{Z}$, se cere $S=a+b$

Cazul I: dacă a şi b au acelaşi semn, se adună **fără a ține cont de semn** şi se pune semnul comun

Cazul II. Dacă a şi b au semne diferite, **fără a ține cont de semn**, scădem din cel mai mare pe cel mai mic, şi punem semnul celui mai mare

Exp: $S=-2+(-5)$. Deoarece $a=-2$ şi $b=-5$ au acelaşi semn, vom aduna $2+5=7$ şi apoi punem semnul "–", deci $S=-7$

Exp.2: $S=2+(-5)$. Deoarece $a=2$ şi $b=-5$ au semne diferite, vom face scăderea $5-2=3$ şi apoi punem semnul celui mai mare (fără a ține cont de semn), adică"–", aşadar $S=-3$

Obs.: semnul "+" în faţa unui număr scris în paranteză dispare şi rămâne semnul din paranteză, iar semnul"–" în faţa unui număr scris în paranteză îi schimbă semnul

Exp.: $+(-2)=-2; -(-2)=2; -(+2)=-2$

Obs.2: dacă în faţa unui număr nu apare nici un semn, însemnă că el are semnul "+"

20) Înmulţirea (împărţirea) numerelor întregi - se înmulţesc cele două numere ținând cont de regula semnelor la înmulţire (aceeaşi ca şi regula semnelor la împărţire)

Regula semnelor la înmulţire:

$+\cdot+=+$ $\quad -\cdot-=+$

$-\cdot+=-$ $\quad +\cdot-=-$

Regula semnelor la împărţire:

$+:+=+$ $\quad -:-=+$

$-:+=-$ $\quad +:-=-$

Exp.: $(-2)\cdot 3=-6$ $\quad (-2)\cdot(-3)=6$

Exp.: $(-6):3=-2$ $\quad (-8):(-4)=2$

21) Teorema împărțirii cu rest pentru numere naturale – oricare ar fi numerele naturale a și b cu $b\neq 0$, există unice numere q și r cu $a:b=c$ rest r cu $0\le r<b$ unde

a - deîmpărțit, b - împărțitor, c -cât iar r -rest

Obs.: proba împărțirii: $a=b\cdot c+r, 0\le r<b$

Obs.2: dacă restul este egal cu 0, atunci spunem că avem împărțire exactă

Exp.: $23:7=3$ rest 2 iar proba împărțirii $23=7\cdot 3+2$

22) Ridicarea la putere a numerelor întregi - definiţia puterilor: dacă $a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{\text{de n ori}}$

Obs.: a se numeşte bază, iar n se numeşte exponent

23) Proprietăţi ale puterilor:

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m:a^n=a^{m-n}$

$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$ $\qquad$ $a^1=a$

$a^0=1,\forall a\neq 0$ $\qquad$ $0^n=0,\forall n\neq 0$

$\left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n$ $\qquad$ nu există 0^0

Obs.1: puterile etajate se efectuează de sus în jos,

Exp.: $2^{3^2}=2^9$

Obs.2: compararea puterilor – se face prin aducerea sau la acelaşi exponent, sau la aceeaşi bază.

Exp: Comparaţi numerele: $a=2^{63}$ şi $b=3^{42}$

$63=3^2\cdot 7$ $\qquad$ $42=2\cdot 3\cdot 7$

$2^{63}=\left(2^3\right)^{3\cdot 7}=8^{21}$ $\qquad$ $3^{42}=\left(3^2\right)^{3\cdot 7}=9^{21}$ şi cum $8^{21}<9^{21}\Rightarrow a<b$

24) Pătrat perfect, cub perfect

– un număr natural n este pătrat perfect dacă se poate scrie sub forma $n=a^2, a\in\mathbb{N}$

– un număr natural n este cub perfect dacă se poate scrie sub forma $n=a^3, a\in\mathbb{N}$

25) Scrierea în baza 10, scrierea în baza 2

a) Scrierea unui număr natural în baza 10

$\overline{a_1a_2....a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+...+a_{n-1}\cdot 10^1+a_n$, $a_1\neq 0$

Exp.: $\overline{abc}=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$

Obs.1: $a\in\{1,2,3,...,9\}$, $b,c\in\{0,1,2,3,...,9\}$ (b,c pot fi orice cifre)

Obs.2: puterea lui 10 este numarul de cifre care apar după cifra noastră

b) Scrierea unui număr natural în baza 10

$\overline{a_1a_2....a_n} = a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot 2^1 + a_n$, $a_1 \neq 0$

Obs.1: $a = 1$, $b, c \in \{0,1\}$

Obs.2: puterea lui 2 este numarul de cifre care apar după cifra noastră

*Exp.:*a) în baza 10, $\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d$

b) în baza 2, $\overline{abcd} = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d$

26) Factor comun - se foloseşte $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ sau $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, greutatea constă în a observa ce putem da factor comun

Exp.: $2341 + 2341 \cdot 7 + 2341 \cdot 2 = 2341 \cdot (1 + 7 + 2) = 2341 \cdot 10 = 23410$

27) Ordinea efectuării operaţiilor

Operaţiile sunt de 3 tipuri:

a) de ordin 1: adunarea şi scăderea

b) de ordin II: înmulţirea şi împărţirea

c) de ordin III: ridicările la putere

E1)dacă nu există paranteze şi operaţiile sunt de acelaşi ordin, se efectuează în ordinea în care apar

E2) dacă nu există paranteze şi operaţiile nu sunt de acelaşi ordin, se efectuează întâi ridicările la putere, apoi înmulţirile şi împărţirile şi abia apoi adunările şi scăderile

E3) dacă există paranteze se efectuează întâi operaţiile din parantezele rotunde, apoi din paranteze drepte şi abia apoi la final din acolade, în fiecare paranteză respectându-se regulile de mai sus

Exp: $N = 2 + \{3 - [4 + 2 \cdot 3 - (2 + 6 : 3 \cdot 2)]\} = 2 + \{3 - [4 + 2 \cdot 3 - (2 + 2 \cdot 2)]\} =$

$= 2 + \{3 - [4 + 2 \cdot 3 - (2 + 4)]\} = 2 + [3 - (4 + 2 \cdot 3 - 6)] = 2 + [3 - (4 + 6 - 6)]$

$= 2 + [3 - (10 - 6)] = 2 + (3 - 4) = 2 + (-1) = 2 - 1 = 1$

Obs. Era greşit ca în paranteza rotundă să o calculăm nerespectând ordinea operaţiilor chiar dacă sunt de acelaşi grad

Este **GREŞITĂ** o rezolvare de tipul: $2+6:3\cdot 2=2+6:6=2+1=3$

Completați cu ceea ce considerați necesar la acest prim capitol