CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 22 februarie 2019
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a IX-a

1. a) Arătați că: $5^n > n^2,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
b) Arătați că: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Rezolvați ecuația: $1+7+13+\cdots+x=280$.
b) Calculați suma: $S = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$, $n \geq 2,\ x \in \mathbb{R}^*$.

3. Se dă patrulaterul $ABCD$, M și N mijloacele laturilor AB și CD. Arătați că $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

4. Pe latura AB și diagonala AC ale paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M și N, astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Arătați că punctele M, N și D sunt coliniare.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 22 februarie 2019
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a X-a

1. a) Calculați: $E = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.
b) Rezolvați ecuația: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-6+2\sqrt{5}}$.

2. Arătați că $E = log_{a_3}\sqrt[n]{a_1a_2} + log_{a_4}\sqrt[n]{a_2a_3} + \cdots + log_{a_1}\sqrt[n]{a_{n-1}a_n} + log_{a_2}\sqrt[n]{a_na_1} \geq 2$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (m-1)x + 2, x < 1 \\ 4x - 1, \ x \geq 1 \end{cases}$ să fie bijectivă.

4. a) Să se determine mulțimea $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ \frac{1+\bar{z}}{z} \in \mathbb{R}, \ z = x + iy\right\}$.
b) Să se arate că $z = (5+2i)^n + (5-2i)^n \in \mathbb{R}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
320112, REŞIȚA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 22 februarie 2019
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+\sqrt{9-x^2}-3}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sum_{k=1}^{n} ln(1+kx))^{\frac{1}{x}}$.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x+1}-ax-b\right)=2\sqrt{2}$.

3. a) Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculați A^n și B^n.

4. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și h_a , h_b , h_c sunt înălțimile corespunzătoare laturilor a, b, c, calculați determinantul: $d=\begin{vmatrix} 1 & a & h_b\cdot h_c \\ 1 & b & h_c\cdot h_a \\ 1 & c & h_a\cdot h_b \end{vmatrix}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 22 februarie 2019
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XII-a

1. Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri în raport cu operația de înmulțire, unde $G_1 = \{x + y\sqrt{5} \ / \ x^2 - 5y^2 = 1;\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ și $G_2 = \left\{A = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix} / \ x^2 - 5y^2 = 1; x, y \in \mathbb{Q}\right\}$. Arătați că cele două grupuri sunt izomorfe.

2. Pe $\mathbb{R}$ se dă legea de compoziție $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.
a) Calculați $E = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ ori}$.
b) Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care $a * b = 9$.

3. Să se calculeze: $I = \int \frac{sinx - cosx}{e^x + sinx} dx$.

4. Se dă șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Se cere:
a) Determinați I_1 și I_2.
b) Arătați că $I_n = \frac{1}{n}\left(x^{n-1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} - (n-1)I_{n-2}\right),\ (\forall) n \geq 2$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f:[1,19]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{19-x}$.

b) Rezolvați ecuația $2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{19-x}\right)+(x-1)(19-x)=93$.

(Concurs GM, ediția a V-a, prelucrare)

SOLUȚIE:

a) $\forall x,y\in[1,19], x<y, f(x)-f(y)=\frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}-\frac{x-y}{\sqrt{19-x}+\sqrt{19-y}}=$

$=(x-y)\cdot\frac{\sqrt{19-x}+\sqrt{19-y}-\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})\cdot(\sqrt{19-x}+\sqrt{19-y})}$ **1p**

Dacă $x,y\in[1,10]\Rightarrow\sqrt{19-x}>\sqrt{x-1}, \sqrt{19-y}\geq\sqrt{y-1}\Rightarrow f(x)-f(y)<0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[1,10]$ **1p**

Dacă $x,y\in[10,19]\Rightarrow\sqrt{19-x}\leq\sqrt{x-1}, \sqrt{19-y}<\sqrt{y-1}\Rightarrow f(x)-f(y)>0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[10,19]$ **1p**

b) Din condițiile de existență ale radicalilor avem că $x\in[1,19]$..... **1p**

$2f(x)=(x-10)^2+12$ **1p**

$12\leq 2f(x)<2f(10)=12, \forall x\in[1,10)\cup(10,19]\Rightarrow$ Ecuația nu are soluții $x\in[1,10)\cup(10,19]$ ... **1p**

Cum $x=10$ este soluție, concluzionăm că ecuația are o singură soluție: $x=10$. **1p**

Problema 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ecuația: $2\cdot\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]^2+(2x-11)\cdot\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]+5-x=0$.

SOLUȚIE:

Notând $t=\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]$, obținem $2t^2+(2x-11)t+5-x=0$ **1p**

$\Delta=(2x-11)^2-4\cdot2\cdot(5-x)=(2x-9)^2$ **1p**

$t_1=\frac{1}{2}, t_2=-x+5$ **1p**

Cum $\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]=-x+5\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ **1p**

$5-x\leq\frac{3x+5}{2x+1}\Leftrightarrow\frac{3x+5}{2x+1}+x-5\geq0\Leftrightarrow\frac{2x(x-3)}{2x+1}\geq0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},0\right]\cup[3,+\infty)$.

Cum $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ **1p**

$\frac{3x+5}{2x+1}<6-x\Leftrightarrow x+4<(5-x)(2x+1)\Leftrightarrow 2(x-2)^2-9<0\Leftrightarrow x\in\left(2-\frac{3}{\sqrt{2}},2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$..... **1p**

$x\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ și $x\in\left(2-\frac{3}{\sqrt{2}},2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow x\in\{0,3,4\}$ care verifică ecuația **1p**

Problema 3.

O dreaptă care trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC intersectează segmentul (AB) în punctul P și segmentul (AC)în punctul Q. Notăm cu $p = \frac{PB}{PA}$ și $q = \frac{QC}{QA}$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{GP} = \frac{1-p}{1+p}\overrightarrow{GB} - \frac{p}{1+p}\overrightarrow{GC}$.

b) Arătați că $p + q = 1$.

c) Arătați că BQ, CP și AG sunt concurente dacă și numai dacă $PQ \parallel BC$.

SOLUȚIE:

a) $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = -p \Rightarrow \overrightarrow{GP} = \frac{1}{1+p}\overrightarrow{GB} + \frac{p}{1+p}\overrightarrow{GA}$ **1p**

$\overrightarrow{GP} = \frac{1}{1+p}\overrightarrow{GB} + \frac{p}{1+p}\left(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\right) = \frac{1-p}{1+p}\overrightarrow{GB} - \frac{p}{1+p}\overrightarrow{GC}$ **1p**

b) Analog se arată că $\overrightarrow{GQ} = \frac{1-q}{1+q}\overrightarrow{GC} - \frac{q}{1+q}\overrightarrow{GB}$ **2p**

Vectorii $\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{GQ}$ sunt coliniari $\Rightarrow \frac{\frac{1-p}{1+p}}{-\frac{q}{1+q}} = \frac{-\frac{p}{1+p}}{\frac{1-q}{1+q}} \Rightarrow \frac{1-p}{q} = \frac{p}{1-q} \Rightarrow p + q = 1$ **1p**

c) Din teorema lui Ceva și reciproca teoremei lui Ceva avem că BQ, CP și AG sunt concurente $\Leftrightarrow$

$(-p) \cdot \left(-\frac{1}{q}\right) \cdot (-1) = -1$ **1p**

$\frac{p}{q} = 1 \Leftrightarrow p = q \Leftrightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{QC}{QA} \Leftrightarrow PQ \parallel BC$ **1p**

Problema 4.

Pe ambele laturi ale unui unghi drept în direcția vârfului unghiului se mișcă două corpuri. Primul corp se mișcă cu viteza de 12 m/min, iar al doilea cu viteza de 16 m/min. La un moment dat distanța dintre corpuri a fost egală cu 100 m. Trei minute mai târziu distanța dintre corpuri a devenit de 40 m. La ce distanță de vârful unghiului erau situate corpurile în primul moment fixat de timp?

SOLUȚIE:

Notăm cu $x =$ distanța de la primul corp la vârful unghiului în primul moment fixat de timp, $y =$ distanța de la al doilea corp la vârful unghiului în primul moment fixat de timp.

$x^2 + y^2 = 100^2$ **1p**

$(x - 36)^2 + (y - 48)^2 = 40^2$ **1p**

$x^2 + y^2 - (x - 36)^2 - (y - 48)^2 = 8400 \Rightarrow 36(2x - 36) + 48(2y - 48) = 8400 \Longrightarrow$

$3x + 4y = 500$ **1p**

$y = 125 - \frac{3x}{4} \Rightarrow x^2 + \left(125 - \frac{3x}{4}\right)^2 = 10000 \Rightarrow x^2 - 120x + 3600 = 0$ **2p**

$(x - 60)^2 = 0 \Rightarrow x = 60$ m **1p**

$y = 80$ m **1p**

<u>Notă.</u> Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

a) Demonstraţi că $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, oricare ar fi numerele reale *a*, *b* şi *c*. Când se atinge egalitatea?

b) Determinaţi numerele reale *x* pentru care $4^x+9^x+36^x=6^x+12^x+18^x$.

SOLUŢIE:

a) Inegalitatea revine la $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$. **2p**

Egalitatea se atinge pentru $a=b=c$. **1p**

b) Pentru $a=2^x, b=3^x, c=6^x$, se atinge egalitatea în inegalitatea de la a). **2p**

Rezultă că $2^x=3^x=6^x$, de unde $x=0$. **2p**

Problema 2.

Se consideră numerele $a=\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$ şi $b=2^{\log_6 18}\cdot 3^{\log_6 3}$.

Arătaţi că $2a-b=0$.

SOLUŢIE:

Fie $x=\log_2 3$; atunci $a=(3+x)(5+x)-(6+x)(2+x)=3\in\mathbb{N}$. **3p**

Fie $u=\lg 2, v=\lg 3$; atunci $\lg b=\dfrac{\lg 18}{\lg 6}\cdot\lg 2+\dfrac{\lg 3}{\lg 6}\cdot\lg 3=\dfrac{(u+2v)\cdot u+v^2}{u+v}=\dfrac{(u+v)^2}{u+v}=u+v=\lg 6$,

prin urmare $b=6\in\mathbb{N}$. **3p**

Rezultă că $2a-b=2\cdot 3-6=0$. **1p**

Problema 3.

a) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ este bijectivă.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$.

SOLUŢIE:

a) Funcţia *f* se obţine prin compunere de funcţii strict crescătoare; rezultă că *f* este strict crescătoare, deci injectivă. Pentru $y \in \mathbb{R}$, există $x = \frac{y^3+1}{2} \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) = y$, aşadar *f* este surjectivă. **3p**

b) Considerând funcţia de la a), ecuaţia se scrie sub forma $f(x) = f^{-1}(x)$, echivalentă cu $f(x) = x$ **2p**

Soluţiile acestei ecuaţii sunt $\left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. **2p**

Problema 4.

Numerele complexe z_1, z_2, z_3 şi z_4 sunt astfel încât $|z_1 - z_2| = 2, |z_2 - z_3| = \sqrt{2}, |z_3 - z_4| = 3\sqrt{2}$, $|z_4 - z_1| = 4$ şi $|z_2 - z_4| = 2\sqrt{5}$. Calculaţi $|z_1 - z_3|$.

Gazeta Matematică 12/2018 (Supliment)

SOLUŢIE:

Considerăm punctele A, B, C, D având afixele z_1, z_2, z_3, respectiv z_4. Ipoteza problemei spune că $AB = 2, BC = \sqrt{2}, CD = 3\sqrt{2}, DA = 4$ şi $BD = 2\sqrt{5}$. **2p**

Cum $AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2 = BD^2$, rezultă că $\mathrm{m}(BAD) = \mathrm{m}(BCD) = 90^\circ$. **2p**

Ducem înălţimile AA' şi CC' în triunghiurile dreptunghice *ABD*, respectiv *CBD* şi considerăm proiecţia *M* a punctului *A* pe dreapta CC'. Folosind teorema catetei şi teorema înălţimii în triunghiurile *ABD* şi *CBD*, apoi teorema lui Pitagora în triunghiul *MAC*, obţinem că $AC = \sqrt{10}$, prin urmare $|z_1 - z_3| = \sqrt{10}$.

..... **3p**

(Altfel: patrulaterul *ABCD* are două unghiuri opuse suplementare, deci este inscriptibil. Folosind teorema lui Ptolemeu: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, obţinem că $AC = \sqrt{10}$.)

Notă. ***Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.***

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie matricele $A=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

Demonstraţi că $(I_2+\mathrm{i}A)^n-(I_2+\mathrm{i}B)^n=\left((1+\mathrm{i})^n-1\right)(A-B),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică 11/2018 (Supliment)

SOLUŢIE:

Avem că $A^n=A$ şi $B^n=B$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. **2p**

Cu formula binomului, $(I_2+\mathrm{i}A)^n=I_2+A\left(C_n^1\mathrm{i}+C_n^2\mathrm{i}^2+\cdots+C_n^n\mathrm{i}^n\right)=I_2+A\left((1+\mathrm{i})^n-1\right)$ şi, analog, $(I_2+\mathrm{i}B)^n=I_2+B\left((1+\mathrm{i})^n-1\right)$. **4p**

Scăzând membru cu membru, obţinem relaţia dorită. **1p**

Problema 2.

Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0\\ e^x, & x\geq 0\end{cases}$.

Determinaţi funcţiile $f\circ g$ şi $g\circ f$ şi studiaţi continuitatea lor.

SOLUŢIE:

$$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},(f\circ g)(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2-1\right), & x\leq-\sqrt{2}\\ x^2-2, & x\in\left(-\sqrt{2},0\right)\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$ **2p**

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x<1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$$ **2p**

Funcţiile f şi g sunt continue, cu excepţia punctelor de racordare a ramurilor, întrucât operaţiile cu funcţii elementare au ca rezultat funcţii continue. **1p**

Calculând limitele laterale şi valorile funcţiilor în punctele de racordare a ramurilor, obţinem că $f\circ g$ este continuă în $-\sqrt{2}$ şi discontinuă în 0, iar $g\circ f$ este discontinuă în 1. ..... **2p**

Problema 3.

a) Dacă funcţia $f:[1,2]\to[2,5]$ este continuă, demonstraţi că ecuaţia $f(x)=x^2+1$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[1,2]$.

b) Daţi exemplu de o funcţie $g:[1,2]\to[2,5]$ pentru care ecuaţia $g(x)=x^2+1$ nu are soluţii în intervalul $[1,2]$.

SOLUŢIE:

a) Considerăm funcţia $h:[1,2]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-(x^2+1)$. Cum *h* este continuă, $h(1)=f(1)-\ -2\geq 0$ şi $h(2)=f(2)-5\leq 0$, rezultă că funcţia *h* se anulează pe intervalul $[1,2]$, de unde cerinţa problemei.

..... **4p**

b) Un posibil exemplu este $g:[1,2]\to[2,5]$, $g(x)=\begin{cases}8-3x, & x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]\\ 6-2x, & x\in\left(\frac{3}{2},2\right]\end{cases}$. **3p**

Problema 4.

Date trei numere naturale de câte trei cifre $m=\overline{abc}$, $n=\overline{def}$ şi $p=\overline{ghi}$, le asociem determinantul

$$\Delta(m,n,p)=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}.$$

a) Dacă *m, n, p* sunt numere divizibile cu 29, arătaţi că $\Delta(m,n,p)$ este un număr divizibil cu 29.

b) Dacă *m, n, p* sunt numere prime, rezultă că $\Delta(m,n,p)$ este un număr prim?

SOLUŢIE:

a) Adunăm de 100 de ori prima coloană şi de 10 ori a doua coloană peste cea de-a treia coloană; în acest fel, putem da 29 factor comun de pe coloana a treia, prin urmare $\Delta(m,n,p)$ este un număr divizibil cu 29.

..... **4p**

b) Nu neapărat: de exemplu, $\Delta(101,103,107)=0$, care nu este număr prim. **3p**

Notă. ***Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.***

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Fie n un număr natural impar. Pe $\mathbb{R}$, definim operația algebrică $x*y=\sqrt[n]{x^n+y^n}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $\mathbb{R},*$ este grup.

b) Demonstrați că $\mathbb{R},*\cong\mathbb{R},+$.

c) Pentru $n=2019$, rezolvați ecuația $\underbrace{x*x*...*x}_{2019\,ori}=2019$.

SOLUȚIE:

a) Se verifică axiomele grupului..... **2p**

b) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}, n$ impar. Evident, f este bijectivă **2p**

$f(x*y)=f\left(\sqrt[n]{x^n+y^n}\right)=x^n+y^n=f(x)+f(y)$ **1p**

c) $\underbrace{x*x*...*x}_{2019\,ori}=\sqrt[2019]{2019x^{2019}}=2019\Rightarrow x=\sqrt[2019]{2019^{2018}}$ **2p**

Problema 2.

Fie $M_1=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\middle|\,a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$, $M_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\,a,b,c,d\in\mathbb{Z}, a+b=c+d\right\}$.

a) Demonstrați că M_1, M_2 au structuri de monoid, relativ la operația de înmulțire.

b) Determinați mulțimile elementelor simetrizabile $U\ M_1$, $U\ M_2$.

SOLUȚIE:

a) Se verifică axiomele monoidului **2p**

b) $\frac{1}{ab},\frac{1}{ac},\frac{1}{bc}\in\mathbb{Z}$ **1p**

$$U\ M_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

..... **2p**

$$U\ M_2=\left\{\begin{pmatrix}a&1-a\\a-1&2-a\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}a&1-a\\1+a&-a\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}a&-1-a\\a-1&-a\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}a&-1-a\\a+1&-2-a\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{Z}\right\}.$$

..... **2p**

Problema 3.

Fie $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ o funcție pară și continuă, $a>0$.

a) Demonstrați că $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx,(\forall)k\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\ e^{2019x}+1}dx$.

SOLUȚIE:

a) $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx$ **1p**

Alegem $x=-t$ și obținem că $\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=-\int_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{-kt}}dt\overset{f\ pară}{=}\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+\frac{1}{e^{kt}}}dt=\int_{0}^{a}\frac{f(t)e^{kt}}{1+e^{kt}}dt=\int_{0}^{a}\frac{f(x)e^{kx}}{1+e^{kx}}dx$

..... **3p**

Finalizare..... **1p**

b) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\ e^{2019x}+1}dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin(x)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$ **2p**

Problema 4.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}\ \{x\}-2\ +2$.

a) Demonstrați că *f* este periodică de perioadă $T=1$.

b) Calculați $\int_{0}^{1}f(x)dx$ și $\int_{-2019}^{2019}f(x)dx$.

SOLUȚIE:

a) $f(x+1)=\{x+1\}(\{x+1\}-2)+2=\{x\}(\{x\}-2)+2=f(x)$ **2p**

b) $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\ x(x-2)+2\ dx=\frac{4}{3}$. **1p**

$\int_{-2019}^{2019}f(x)dx=\int_{-2019}^{-2018}f(x)dx+\int_{-2018}^{-2017}f(x)dx+...+\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+...+\int_{2018}^{2019}f(x)dx$ **2p**

Din faptul că *f* este periodică de perioadă T = 1, obținem că

$\int_{-2019}^{2019}f(x)dx=4038\int_{0}^{1}f(x)dx=5384$ **2p**

Notă. ***Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.***