MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Să se determine valorile reale ale lui a ştiind că distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+ax$ cu axa (Ox) este egală cu 1.

Barem:

$f(x)=3x^2+ax, x\in\mathbb{R}, x_1, x_2$ rădăcini ale ecuației $f(x)=0$. Presupunem că $x_1>x_2$ **1p**

$\Delta=a^2>0, (\forall)a\neq 0$ **1p**

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{\Delta}}{6} \\ x_1>x_2 \end{array}\right\}\Rightarrow x_1=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{6}, x_2=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{6}$$ **2p**

$$\text{Condiția din enunț}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} |x_1-x_2|=1 \\ x_1>x_2 \end{array}\right\}\Rightarrow x_1-x_2=1$$ **1p**

Din relațiile lui Viete, rezultă $x_1+x_2=-\frac{a}{3}$ **1p**

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1=\dfrac{-a}{3}\Leftrightarrow x_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{6} \\ x_1=\dfrac{-a}{6}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{6} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{a}{6}=\frac{-a}{6}+\frac{\sqrt{\Delta}}{6}\Leftrightarrow 9=a^2\Leftrightarrow a=\pm 3$$ **1p**

Problema 2.

a) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1+b_2+b_3=13$ şi $b_3=9b_1$. Să se calculeze b_5.

b) Dacă numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică să se demonstreze că are loc relaţia $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=(a+b+c)^2+6(a-b)^2$.

Barem:

a) Fie $b_2=b_1\cdot q, b_3=b_1\cdot q^2$ şi obţinem $b_1+b_1q+b_1q^2=13$ şi $b_1q^2=9b_1$.

Avem $q^2=9$ şi $b_1\left(1+q+q^2\right)=13$. **2p**

Deci pentru $q=3$ avem $b_1=1$ şi pentru $q=-3$ avem $b_1=\frac{13}{7}$.

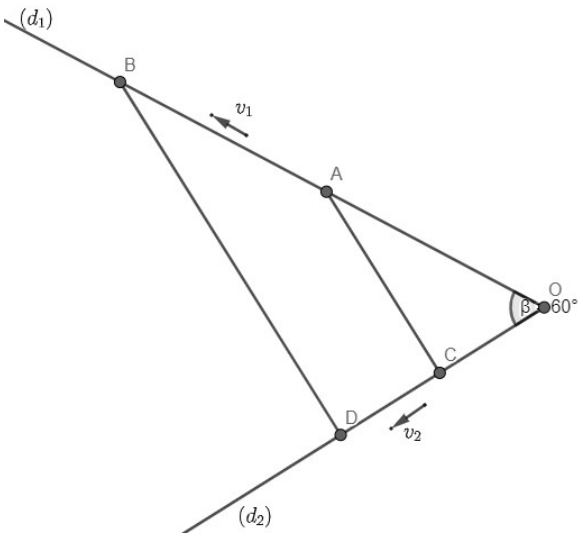
Obținem $b_5=q^4=81$ sau $b_5=\frac{13}{7}\cdot 81=\frac{553}{7}$. **2p**

b) Dacă *a, b, c* sunt în progresie aritmetică notăm $a=\alpha-r, b=\alpha, c=\alpha+r$ şi obţinem în relaţia dată: $3\left[(\alpha-r)^2+\alpha^2+(\alpha+r)^2\right]=(3\alpha)^2+6(-r)^2 \Leftrightarrow 9\alpha^2+6r^2=9\alpha^2+6r^2$ **3p**

Problema 3.

Într-un oraş O se întâlnesc două şosele drepte notate d_1 şi d_2 şi care formează un unghi cu măsura egală cu 60^0. Pe şoseaua d_1 sunt situate şi oraşele A şi B astfel încât A se găseşte între O şi B, iar pe d_2 sunt situate staţiile de benzină C şi D astfel încât C este între O şi D; în plus se ştie că arhitecţii au proiectat amplasarea benzinăriilor astfel încât $AC \perp d_2$ şi $BD \perp d_2$. Două autoturisme pornesc simultan unul din A spre B cu viteza constantă de 80 km/h, celălalt din C spre D cu viteza constantă de 60 km/h. Stabiliţi, justificând răspunsul, care dintre cele două autoturisme ajunge primul la destinaţia dorită.

Barem:



Desen correct.....**1p**

$\begin{cases} v_1 = 80\text{km/h} \\ v_2 = 60\text{km/h} \end{cases}$

$\triangle ODB, \triangle OCA: \begin{cases} OD = \frac{1}{2}\cdot OB \\ OC = \frac{1}{2}\cdot OA \end{cases}$ **1p**

Fie t_1, timpul necesar primului autoturism pentru a ajunge din A în B și t_2, timpul necesar celui de-al doilea autoturism pentru a ajunge din C în D.....**1p**

$AB = OB - OA = 2(OD - OC) = 2CD = 2\cdot x$ **1p**

$\begin{cases} [AB]: 2x = 80\cdot t_1 \\ [CD]: x = 60\cdot t_2 \end{cases}$ **1p**

Obține $2 = \frac{80}{60}\cdot\frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow t_1 > t_2$ **1p**

Așadar, ajunge mai repede autoturismul din C în D.....**1p**

Problema 4.

Fie $\triangle ABC$ şi punctele *P* şi *Q* astfel încât $\overrightarrow{PC} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$.

a) Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{PQ}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstraţi că punctele *P* şi *Q* şi mijlocul segmentului [AB] sunt coliniare.

c) Ştiind că $PB = 4\,\text{cm}, AQ = 3\,\text{cm}, m(\measuredangle ABC) = 60^\circ$, calculaţi lungimea segmentului [AB] şi aria $\triangle ABC$.

Barem:

a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ **2p**

b) Fie *M* mijlocul lui $[AB]$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\\ \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$ **1p**

Obține $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{QM}=\dfrac{\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}}{2}\\ \overrightarrow{QA}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{QM}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$ **1p**

Obține $\overrightarrow{QM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(+\overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$

Așadar, $\overrightarrow{QM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}\Leftrightarrow P,Q,M$ coliniare **1p**

c) Se construiește $CE\perp AB$.

Obține $CE=4\sqrt{3}$ cm, apoi $AE=4\sqrt{6}$, de unde $AB=4+4\sqrt{6}$ **1p**

$A_{\triangle ABC}=\left(4+4\sqrt{6}\right)\cdot 2\sqrt{3}$ **1p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă se va puncta corespunzător.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{x+1}\left(\log_2\frac{2x-1}{x+3}\right)$, unde D este domeniul de definiție a funcţiei *f*.

a) Să se determine mulțimea maximă de definiție a funcției *f*.
b) Demonstraţi că reprezentarea geometrică a graficului funcţiei *f* nu intersectează axa absciselor.
c) Stabiliţi semnul funcţiei *f*.

Barem:

a) $\left.\begin{matrix}x+1>0\\ x+1\neq 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$ (1) **0.5p**

$\log_2\frac{2x-1}{x+3}>0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x+3}>1\Leftrightarrow\frac{2x-1-x-3}{x+3}>0\Leftrightarrow\frac{x-4}{x+3}>0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$ (2) **1p**

Din (2) și (1), obține $x\in(4,+\infty)\Rightarrow D=(4,+\infty)$ **0.5p**

b) $\log_{x+1}\left(\log_2\frac{2x-1}{x+3}\right)=0\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)=1\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x+3}=2\Leftrightarrow 2x-1=2x+6\Leftrightarrow -1=6$(fals!) **1p**

Așadar, ecuația nu are soluții pe D, adică $G_f\cap Ox=\varnothing$ **1p**

c) Dacă $f(x)<0,$ atunci pentru $x>4\Rightarrow\log_2\frac{2x+1}{x+3}<1$, adică $\frac{2x+1}{x+3}<2$ (adevărat)..... **1p**

Dacă $f(x)>0,$ atunci pentru $x>4\Rightarrow\log_2\frac{2x+1}{x+3}>1$, adică $\frac{2x+1}{x+3}>2$ (fals)..... **1p**

Așadar, $f(x)<0,(\forall)x\in(4,+\infty)$ **1p**

Problema 2.

Se consideră dreapta $(a):2x-y=4$. Prin *A(-2,3)* se duce dreapta *(b)* paralelă cu dreapta *(a)*, pe care se consideră punctul *B* de abscisă 5.

a) Calculaţi distanţa de la *A* la *(a)*.
b) Calculaţi $d(A,B)$.
c) Demonstrați că pentru orice punct *C* de pe dreapta *(a)*, aria ΔABC este constantă.

Barem:

a) $d(A,(a))=\frac{|2\cdot(-2)-3-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{11}{\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$ **1p**

b) $\left.\begin{array}{l} a \parallel b \Rightarrow m_a = m_b \\ m_a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_b = 2 \Rightarrow (b): y-3 = 2(x+2) \Rightarrow (b): 2x - y + 7 = 0$ **2p**

Cum $B(5,y) \in (b)$, obține $10 - y + 7 = 0$, adică $y = 17 \Rightarrow B(5,17)$ **1p**

Obține $d(A,B) = \sqrt{7^2 + 14^2} = 7\sqrt{5}$ **1p**

c) Fie $C(u,v) \in (a)$. Obține $2u - v = 4, v = 2u - 4 \Rightarrow C(u, 2u-4)$ **1p**

$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ [AB] - \text{fix} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot d\left(C,(b)\right)}{2} = \dfrac{AB \cdot d\left(A,(a)\right)}{2} = \text{constant}$ **1p**

Problema 3.

Diana a plasat într-un depozit, în regim de dobândă simplă, suma de 4000 lei, cu rata anuală a dobânzii de 2,5%, iar în alt depozit suma de 4500 lei, cu rata anuală a dobânzii de 2%. Pentru fiecare n natural x_n, y_n sunt sumele în lei disponibile în primul depozit, respectiv în al doilea după n ani (x_0=4000, y_0=4500).

a) Diana se gândeşte să renunţe la depozitul cu dobânda mai mică şi să transfere cei 4500 de lei în primul depozit. Calculaţi câţi lei pierde în trei ani dacă nu face această tranzacţie?

b) Demonstrați că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt progresii aritmetice.

c) Determinaţi numărul de ani după care suma disponibilă în cele două depozite depăşeşte 11000 lei.

Barem:

a) Pentru suma de 4500 lei dobânda într-un an cu rata de 2,5% este $\dfrac{2,5}{100} \cdot 4500 = 2,5 \cdot 45 = 112,5$ lei, iar dobânda cu rata de 2% este $\dfrac{2}{100} \cdot 4500 = 90$ lei. Diferenţa 112,5-90=22,5 lei, reprezintă pierderea pe un an. În trei ani Diana pierde 3·22,5 lei=67,5 lei…….. **2p**

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_0 = 4000$

$x_1 = 4000 + \dfrac{25}{100} \cdot 4000 \Rightarrow x_1 = 4000 + 100$

$x_2 = x_0 + 2 \cdot 100$

.....

$x_n = x_0 + (n-1) \cdot 100$

Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este progresie aritmetică cu primul termen x_0=4000 şi raţia 100…….... **2p**

Analog $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este progresie aritmetică cu primul termen y_0=4500 şi raţia 90…….. **1p**

c) După n ani în primul depozit Diana are $S_n = 4000 + (n-1) \cdot 100$, iar în al doilea depozit $S'_n = 4500 + (n-1) \cdot 90$.

Deci $S_n + S'_n > 11000 \Leftrightarrow 4000 + (n-1) \cdot 100 + 4500 + (n-1) \cdot 90 > 11000$

$(n-1) \cdot 190 > 2500 \Leftrightarrow n - 1 > \dfrac{2500}{190} \Rightarrow n \geq 15$

După 15 ani suma din cele două depozite depăşeşte 11000 lei……. **2p**

Problema 4.

Determinați termenul care îl conține pe b^2 din dezvoltarea $\left(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}\right)^n$, știind că n este cel mai mare număr natural care verifică $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$.

Barem:

Din $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$, obținem $-\log_3 n + \dfrac{\log_3 n}{\log_3 n - 1} > 0$ **1p**

Cu substituția $\log_3 n = \alpha$, obținem $\dfrac{\alpha(\alpha-2)}{\alpha-1} > 0$, adică $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$. **3p**

Dacă $\alpha < 2$, atunci $\log_3 n < 2$, adică $n_{\max} = 8$. **1p**

$T_{k+1} = C_8^k a^{\frac{8-k}{2}} b^{\frac{k}{3}} \Rightarrow k = 6$ **1p**

Termenul care îl conține pe b^2 este $T_7 = C_8^6 ab^2 = 28ab^2$ **1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Se dă un graf regulat de ordinul trei cu 10 varfuri.

a) Câte muchii are graful?

b) Se poate să avem un graf regulat de ordin n cu m vârfuri, unde n și m sunt numere natural impare?

c) La o competiție participă 10 elevi A, B, C, D, E, F, G, H, I, K. Oricare dintre ei are exact 3 prieteni printre ceilalți 9 (relația de prietenie este valabilă în ambele sensuri: dacă A este prieten cu B, atunci și B este prieten cu A). Se poate realiza o împărțire a celor 10 în două echipe, astfel încât în fiecare echipă să nu se regăsească 2 prieteni? Descrieți o astfel de repartiție pe echipe.

Barem:

a) Un graf regulat de ordin 3 este un graf care are gradul 3 pentru fiecare vârf ……..….**1p**

Vom avea $\frac{10\cdot 3}{2}=15$ muchii……..…**1p**

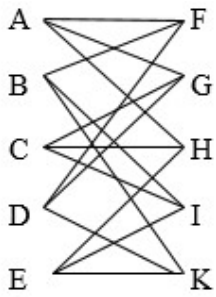
b) Presupunem că putem avea un graf regulat de ordin n cu m vârfuri. Atunci acesta va avea $\frac{n\cdot m}{2}$ muchii

$\Rightarrow (n\cdot m):2$ ……**1p**

Cum n și m sunt numere impare $\Rightarrow n\cdot m$ este număr impar $\Rightarrow$ contradicție ……..……..**1p**

c) Dacă definim relația de prietenie ca muchia unui graf, vom avea un graf regulat de ordinal 3 cu 10 vârfuri și cu muchiile (de ex.): A-F, A-G, A-H, B-I, B-K, B-F, C-G, C-H, C-I, D-K, D-F, D-G, E-H, E-I, E-K. Atunci echipele vor fi (A, B, C, D, E) și (F, G, H, I, K)……..…**3p**

SAU



Reprezentarea unui graf bipartit:

…….....**3p**

Problema 2.

Pe o anumită piață comercială s-au studiat 5 produse. În tabelul următor sunt prezentate situațiile acestora pentru întreaga piață (coloanele 2-5), pentru principalul competitor de pe piață (coloana 3) și pentru un producator X (coloana 4):

Produse (1)	Vânzări totale pe piață în anul 2018 (mii unități) (2)	Vânzări ale principalului competitor pe piață în anul 2018 (mii unități) (3)	Procent relative de piață al producătorului X în anul 2018 (4)	Rata de creștere a pieții pentru anul 2018 (%) (5)
Telefoane	315	120	0,30	75
Televizoare	80,5	50	0,20	15
Laptop-uri	108	60	0,45	20
Electrocasnice	43,5	10	0,05	45
Antene satelit	8,24	5	0,10	3

Definim conceptele de:

- Procentajul de piață relativ (folosit pentru a compara un produs cu cel al principalului competitor pe piata respectivă).

$$\text{Procentajul de piata relativ} = \frac{\text{Vânzările companiei}}{\text{Vânzările celui mai puternic competitor}}$$

- Rata de creștere a pieței pe un an.

$$\text{Rata de crestere a pietei} = \frac{\text{vanzari(an curent)} - \text{vanzari(an precedent)}}{\text{vanzari(an precedent)}} \times 100\,(\%)$$

Se cere:

a) Calculați numărul de unități vândute de producătorul X pentru fiecare categorie de produse în anul 2018.

b) Calculați numărul de unități vândute pe piață în anul 2017 pentru fiecare categorie de produse.

c) Reprezentați printr-o diagramă circulară procentul de vânzări al fiecarui produs în parte pentru principalul competitor în anul 2018.

d) Se consideră că este profitabil pentru o firmă să mențină în producție articole care au un număr mic de unități vândute, dacă media modulelor abaterilor de la medie este cel mult 13.000 de unități. Verificați dacă este profitabil pentru compania X să mențină toate cele 5 articole în producție.

Barem:

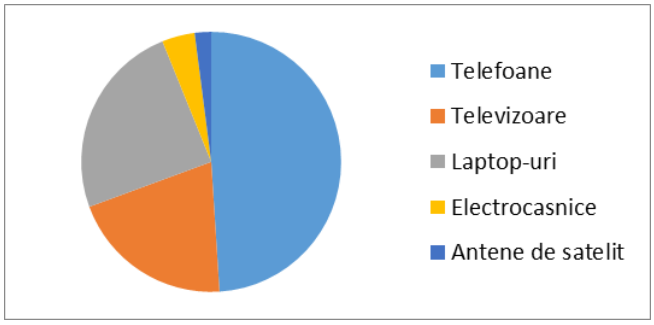
a) $0,30 = \frac{x}{120} \Rightarrow x = 36$ mii de telefoane.

Analog se obțin 10 mii televizoare, 27 mii laptop-uri, 500 electrocasnice, 500 antene de satelit ……...**1p**

b) $75 = \frac{315 - x}{x} \cdot 100 \Rightarrow x = 180$ mii de telefoane

Analog se obțin 70 mii televizoare, 90 mii laptop-uri, 30 mii electrocasnice, 8 mii antene de satelit.…**2p**

c) calculul procentelor $\frac{120 \cdot 100}{245} = 48,97\%$ telefoane; 20,40% televizoare; 24,48% laptop-uri; 4,08% electrocasnice; 2,04% antene de satelit; reprezentarea diagramei circulare ……...**2p**



d) Media numărului de produse vândute de compania X este 14,80……**1p**

Media modulelor abaterilor de la medie este 13,60 > 13, deci nu este profitabil pentru compania X să mențină toate cele 5 articole în producție **1p**

Problema 3.

Harta rutieră a unui oraș este reprezentată sub forma unui graf complet neorientat cu 100 de noduri, $A_1, A_2, A_3, ..., A_{100}$, care reprezintă stațiile de autobuz.

a) Demonstrați că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.....+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Câte drumuri sunt reprezentate pe hartă?

c) Se consideră un traseu care străbate nodurile $A_1, A_2, A_3, ..., A_{100}$, în această ordine, pe muchiile $(A_1, A_2), (A_2, A_3), ..., (A_{99}, A_{100})$. Pe acest traseu se organizează în fiecare an un concurs de viteză pentru autoturisme, de aceea comunitatea locală investește anual în repararea lui. Se notează cu c_i costurile de reparație a fiecărui drum dintre nodurile A_i și A_{i+1}, pentru orice $i\in\{1,2,...,99\}$. Se știe că $c_1=100$ unități monetare și $c_i=c_{i-1}+i, \forall i\in\{2,3,...,99\}$. Determinați costul total de reparație al traseului pentru concurs.

d) Octavian, un renumit șofer de viteză, își propune ca în acest an să câștige acest concurs. Super-mașina sa reușește pe fiecare muchie $(A_i, A_{i+1}), i\in\{1,2,...,99\}$ să obțină un timp $t_i=\frac{10}{c_i-99}$ minute, pentru orice $i\in\{1,2,...,99\}$. Aflați care va fi timpul în care va termina Octavian traseul.

Barem:

a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$ **1p**

b) Numărul drumurilor într-un graf complet cu 100 de vârfuri este $C_{100}^2=4950$ **1p**

c) $c_2=c_1+2, c_3=c_1+2+3, ..., c_n=c_1+2+3+...+n$

$c=176.451$ **3p**

d) $T=t_1+t_2+t_3+...+t_{99}=10\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+99}\right)$

$T=10\left(\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{99\cdot 100}\right)=20\left(1-\frac{1}{100}\right)$

Se obține *T*= 19 min 48 sec **2p**

Problema 4.

Pe o planetă sferică există un singur aeroport, acesta fiind situat la Polul Nord al planetei. Pe acea planetă sunt doar trei aeroplane cu aceeași capacitate a rezervorului și capabile de aceleși perfomanțe (aceeași viteză, același consum, etc.). Aeroportul este dotat cu mult carburant, fiind singura sursă de alimentare de la sol. Totuși aeroplanele se pot alimenta între ele oricând în zbor. Un plin de carburant este necasarul pentru ca un aeroplan să se deplaseze pe distanța Polul Nord- Polul Sud (sau invers). Misiunea pe care o au cele trei aeroplane este aceea ca unul dintre aparate să zboare în jurul planetei de-a lungul unui meridian, trecând pe deasupra Polului Sud, ajutat fiind de către celelalte două pentru a se alimenta cu combustibil în zbor, iar în final toate trei aparate să se reunească pe aeroport.

a) Explicați cum ați organiza zborul celor 3 aeroplane și unde ar fi situate punctele de alimentare în zbor, de la un aparat la altul, pentru a finaliza misiunea propusă.

b) Determinați lungimile drumurilor parcurse de cele trei aeroplane, pentru varianta găsită, știind că lungimea traseului Polul Nord – Polul Sud – Polul Nord este 150.000 km.

c) Reprezentați zborurile celor trei aeroplane prin trei grafuri orientate.

Barem:

a) Notam aeroplanul cu care trebuie să zbori în jurul planetei cu a1 și celelalte aeroplane cu a2 si a3.

- a1, a2 și a3 zboară împreună până la 1/4 din drumul PN-PS. a1 și a2 se alimentează de la a3 cu câte 1/4 din rezervor, iar a3 se întoarce la aeroport.
- a1 și a2 zboară împreuna până la 1/2 din drumul PN-PS. a1 se alimentează de la a2 cu 1/4 din rezervor și astfel are rezervorul plin, iar a2 cu restul de 1/2 din rezervor se întoarce la aeroport.
- a1 cu rezervorul plin parcurge restul de 1/2 din drumul PN-PS și încă 1/2 din drumul PS-PN.
- a2 și a3 zboară împreună în sens invers 1/4 din drumul PN-PS. a2 se alimenteaza de la a3 cu 1/4 din rezervor și a3 se întoarce la aeroport.
- a2 cu rezervorul plin zboară până la a1, la jumătate din distanța PN-PS, în sens invers. a1 se alimentează de la a2 cu 1/2 din rezervor și ajunge la aeroport, iar a2 mai are 1/4 de rezervor cu care parcurge înapoi spre aeroport 1/4 din drum.
- a3 zboară până la 1/4 din drumul PS-PN. a2 se alimentează de la a3 cu 1/4 din rezervor.
- a2 și a3 zboară împreună până la aeroport ultima porțiune de 1/4 din drumul PS-PN. **3p**

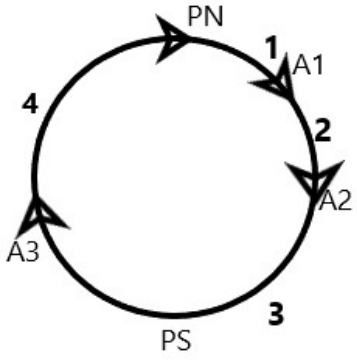
b) Fie e=150.000 km

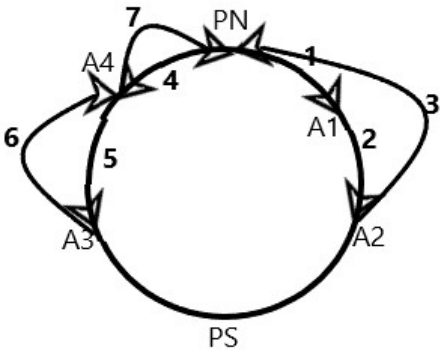
$$d_1 = \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}e = e = 150000\,\text{km}$$

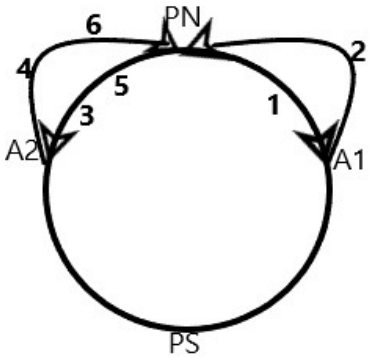
$$d_2 = \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{4}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e = e = 150000\,\text{km}$$

$$d_3 = \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}e = \frac{6}{8}e = 112500\,\text{km}$$ …….....**2p**

c) Reprezentările celor trei grafuri orientate **2p**







Notă. *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie matricea $X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că $X^2\cdot A=A\cdot X^2$, pentru orice A, matrice pătratică de ordinul doi cu elementele numere reale.

b) Să se calculeze suma $S=X+X^2+X^3+...+X^{2019}$.

Barem:

a) $X^2=-I_2$. **1p**

$X^2A=-I_2A=-A$ și $AX^2=-AI_2=-A$. **2p**

b) $X^3=-X$, $X^4=X^2\cdot X^2=-I_2\cdot(-I_2)=I_2$. **1p**

Avem că $X+X^2+X^3+X^4=O_2$. **1p**

$S=X+X^2+X^3+...+X^{2019}=504\cdot(X+X^2+X^3+X^4)+X+X^2+X^3=X-I_2-X=-I_2$ **2p**

Problema 2.

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(m, 1)$, $B(3, m)$ și $C(1,2)$, unde m este un număr real.

a) Demonstrați că punctele A, B și C nu sunt coliniare pentru nicio valoare a numărului real m.

b) Determinați numărul real m pentru care aria triunghiului ABC este minimă.

Barem:

a) $\Delta=m^2-3m+4$. **1p**

$\Delta=\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$, oricare ar fi m număr real. Rezultă că $\Delta\neq 0$, oricare ar fi m număr real. Deci A, B, C nu pot fi coliniare. **2p**

b) $S=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{2}|m^2-3m+4|=\frac{1}{2}\left[\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]\geq\frac{7}{8}$. **2p**

Aria minimă se obține pentru $m=\frac{3}{2}$. **2p**

Problema 3.

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-2x+3y$.

a) Demonstrați că legea "$\circ$" nu este asociativă.

b) Demonstrați că există a, b numere raționale care nu sunt întregi astfel încât $a\circ b$ este număr natural.

Barem:

a) De exemplu, $(0\circ 1)\circ 2 \neq 0\circ(1\circ 2)$ **2p**

b) Fie n număr natural, $a\circ b = n \Rightarrow a = \dfrac{n-3b}{b-2}$. **2p**

Alegem n număr natural, b număr rațional care nu este întreg astfel încât a este număr rațional care nu este întreg. De exemplu, $n=0,\ b=\dfrac{1}{3},\ a=\dfrac{3}{5}$. **3p**

Problema 4.

Spunem că o matrice A are proprietatea "p" dacă fiecare element este egal cu -1 sau cu 1 și produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană din matricea A este egal cu -1. Sorin vrea să dea exemple de matrice A cu proprietatea "p".

a) Fie $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ -1 & -1 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$. Cum trebuie să aleagă Sorin numerele a, b, c, d, e astfel încât A să aibă proprietatea "p"?

b) Câte matrice de ordin 3 având proprietatea „p" poate scrie Sorin? Justificați răspunsul!

c) Poate Sorin să dea un exemplu de matrice cu proprietatea „p" cu trei linii și patru coloane? Justificați răspunsul!

Barem:

a) $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 1$, $e = 1$. **2p**

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ z & t & u \end{pmatrix}$, $a,b,c,d,x,y,z,t,u \in \{-1,1\}$.

a, b, c, d sunt arbitrare din mulțimea {-1, 1}.

Sorin trebuie să determine x, y, z, t, u. **1p**

x, y, z, t sunt: $x = -ab$, $y = -cd$, $z = -ac$, $t = -bd$, iar $u = -xy = -abcd$ și $u = -zt = -abcd$. **1p**

Cum a poate fi ales în două moduri și la fel b, c, d rezultă $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4 = 16$ matrice..... **1p**

c) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ o matrice cu proprietatea "p". Atunci $abcd = -1$, $xyzt = -1$, $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, $ax\alpha = -1$, $by\beta = -1$, $cz\gamma = -1$, $dt\delta = -1$. **1p**

Rezultă $abcdxyzt\alpha\beta\gamma\delta = -1$ și $abcdxyzt\alpha\beta\gamma\delta = 1$, fals..... **1p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*