MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Considerând ecuația $2xy-4x+5y-2029=0$, $x,y\in\mathbb{R}$, se cere:

a) Să de determine o soluție $(x;y)$ a ecuației, cu x și y numere naturale.

b) Să se arate că ecuația are un număr finit de soluții $(x;y)$, cu x și y numere întregi.

c) Să se demonstreze că ecuația dată are o infinitate de soluții $(x;y)$, cu x și y numere reale iraționale.

SOLUȚIE:

Ecuația se poate scrie în forma $(2x+5)(y-2)=2019$ sau $y=\dfrac{4x+2029}{2x+5}$ 2p

a) De exemplu, $y-2=1$, $2x+5=2019\Rightarrow(x;y)=(1007;3)$ verifică ecuația 2p

b) Dacă $x,\ y\in\mathbb{Z}$ și $(x;y)$ verifică ecuația, atunci $(2x+5)$ și $(y-2)$ sunt numere întregi și totodată sunt printre divizorii întregi ai lui 2019, deci ecuația are număr finit de soluții. 1p

c) Putem considera alegerea $2x+5=a\sqrt{2}$ și $y-2=\dfrac{2019}{a\sqrt{2}}$, cu $a\in\mathbb{Q}^*$.....2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 2.
Un grădinar are o grădină în care a plantat parcele cu tufe de trandafiri. Într-o zi el are de realizat un aranjament floral din trandafiri. Pentru aceasta, el taie un trandafir din prima parcelă, doi din a doua parcelă și începând cu a treia parcelă taie de fiecare dată un număr de trandafiri egal cu totalul numărului de trandafiri tăiați din parcelele anterioare, continuând astfel până la ultima parcelă. Notând a_n numărul trandafirilor tăiați din parcela cu numărul $n \in \mathbb{N}^*$, se cere:

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 3}$ este progresie geometrică.
b) Determinați numărul minim de flori pe care trebuie să îl aibă parcela cu numărul 8 în condițiile enunțate.
c) Determinați câte parcele cu tufe de trandafiri are grădinarul știind că pentru realizarea aranjamentului floral a folosit 3072 trandafiri.

SOLUȚIE:

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $(\forall) n \geq 2$ 1p
$a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = a_n$, $(\forall) n \geq 3 \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n$, $(\forall) n \geq 3$ 1p
deci $(a_n)_{n\geq 3}$ este progresie geometrică de rație $q = 2$ și prim termen $a_3 = 3$ 1p
b) $a_8 = 96$ 2p
c) $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$, $(\forall) n \geq 3$ și $a_1 + a_2 + ... + a_n = 3072$ 1p
$\Rightarrow a_{n+1} = 3072$, $n = 12$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX –a

Problema 3.

a) Demonstrați inegalitatea $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}$, $(\forall)a,b\in[0;+\infty)$

b) Considerând $f:[2;10]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}$, determinați mulțimea $M=\{x\in[2;10]\,/\,f(x)\in\mathbb{N}\}$.

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \Leftrightarrow\ 0\le 2\sqrt{ab}$ 1p

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}\ \Leftrightarrow\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$ 2p

b) Fie $a=x-2$, $b=10-x$, $x\in[2;10]$ și evident, având $a,b\in[0;+\infty)$, se verifică inegalitatea cerinței a) obținând astfel $2\sqrt{2}\le\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}\le 4$ 1p

$f(x)\in\left[2\sqrt{2};4\right]\cap\mathbb{N}\ \Rightarrow f(x)\in\{3;4\}$ 1p

$f(x)=3\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\dfrac{12\pm 3\sqrt{7}}{2}$ 1p

$f(x)=4\ \Rightarrow\ x=6$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 4.

În triunghiul ABC, considerăm punctul $D \in BC$, cu C între B și D încât $CD = 2BC$, respectiv punctul E încât $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CE}$. Dacă F este intersecția dreptelor AB și DE iar $k = \frac{EF}{FD}$, demonstrați următoarele afirmații:

a) $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AE}$;

b) $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2(1+k)}\overrightarrow{BA} + \frac{6k-1}{2(1+k)}\overrightarrow{BC}$;

c) $k = \frac{1}{6}$.

SOLUȚIE:

a) $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA}$ 2p

b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 1p

$\overrightarrow{FD} = \frac{FD}{ED}\overrightarrow{ED} = \frac{1}{k+1}\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{k+1}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{2}\overrightarrow{BC}\right)$.....1p

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = \frac{3}{2(1+k)}\overrightarrow{BA} + \frac{6k-1}{2(1+k)}\overrightarrow{BC}$ 1p

a) $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BA}$ coliniari.....1p

$6k - 1 = 0$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Considerând $x=\dfrac{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{10}}{3}$ și $y=\dfrac{2\lg 98+\lg 99}{3}$, demonstrați că:

a) Numerele considerate, x și y, sunt reale iraționale.

b) Partea întreagă a numărului x, notată $[x]$, este egală cu 2.

c) Se verifică ordinea $x>y$.

SOLUȚIE:

a) $x=\dfrac{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{10}}{3} \Rightarrow (3x)^3=\left(2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{10}\right)^3$ 1p

$x\in\mathbb{Q}\Rightarrow\ldots\Rightarrow \sqrt[3]{90}\in\mathbb{Q}$, contradicție, deci $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 1p

$y=\dfrac{2\lg 98+\lg 99}{3}\Rightarrow 10^{3y}=98^2\cdot 99$ 1p

Dacă $y\in\mathbb{Q}$, evident $y\neq 0$ și putem scrie $y=\dfrac{m}{n}$, cu $m,n\in\mathbb{N}^*$, fracție ireductibilă, $\Rightarrow 10^{3m}=98^{2n}\cdot 99^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 99^n \vdots 10$, contradicție, deci $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 1p

b) $x>\dfrac{2\cdot 2+2}{3}=2$ 1p

și totodată $x<\dfrac{2\cdot 3+3}{3}=3$, deci $[x]=2$ 1p

c) $y=\dfrac{2\lg 98+\lg 99}{3}<\dfrac{2\cdot 2+2}{3}=2$ și având $x>2>y \Rightarrow x>y$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 2.

Trei localități A, B și C sunt reprezentate pe un sistem cartezian ortogonal xOy, unde axele de coordonate reprezintă două autostrăzi. Localitatea A este la distanța de $10\,km$ de Oy și $20\,km$ de Ox și notăm aceasta prin $A(10;20)$. La fel, avem $B(70;40)$, $C(10;-20)$ iar $N(30;0)$ este un punct pe autostrada Ox unde este amplasată o stație PECO. Se cere:

a) Demonstrați că punctele B, C și N sunt coliniare și calculați distanța dintre localitățile B și C.

b) Considerând un punct $P \in Ox$ legat de localitățile A și B prin două drumuri, arătați că suma lungimilor celor două drumuri este cel puțin egală cu $60\sqrt{2}\ km$.

c) Considerând funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-20x+500}+\sqrt{x^2-140x+6500}$, arătați că există un unic punct $x_0\in\mathbb{R}$ care verifică $f(x)\geq f(x_0)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ și determinați $m=f(x_0)$.

SOLUȚIE:

a) $m_{BN}=1$, $m_{CN}=1$ 1p

$m_{BN}=m_{CN}\Rightarrow$ puncte coliniare 1p

$BC=60\sqrt{2}$ 1p

b) Suma lungimilor celor două drumuri care leagă P de A și B este cel puțin egală cu $AP+PB$,

dar $AP+PB=CP+PB\geq BC=60\sqrt{2}$ 2p

c) $f(x)=\sqrt{(10-x)^2+20^2}+\sqrt{(x-70)^2+40^2}=AP+PB\geq BC$, cu egalitate numai când $P\equiv N$ 1p

$\Rightarrow x_0=30$ și $m=f(x_0)=60\sqrt{2}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 3.

Fie funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=2z+\bar{z}$. Se cere:

a) Calculați $f(2+3i)$.

b) Determinați $z\in\mathbb{C}$ care verifică $f(z)=6-i$.

c) Calculați $\underbrace{(f\circ f\circ ...\circ f)}_{2019 \text{ de } f}(1-i)$.

d) Demonstrați că funcția f este inversabilă și are inversa $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f^{-1}(z)=\dfrac{2z-\bar{z}}{3}$.

SOLUȚIE:

a) $f(2+3i)=...=6+3i$ 1p

b) $f(z)=6-i \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow z=2-i$ 1p

c) $f(1-i)=3-i$, $(f\circ f)(1-i)=f(f(1-i))=f(3-i)=9-i$ 1p

$\underbrace{(f\circ f\circ ...\circ f)}_{2019 \text{ de } f}(1-i)=3^{2019}-i$ 1p

d) f surjectivă 1p

f injectivă 1p

f^{-1} 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 4.

Dacă A este o mulțime cu 5 elemente, demonstrați că:

a) Numărul submulțimilor mulțimii A este 32.

b) Există 243 perechi ordonate de mulțimi $(X;Y)$ cu $X \cup Y = A$.

c) Dacă $X \neq Y$, $X, Y \subseteq A$, sunt două submulțimi nevide din A, arătați că probabilitatea ca $X \cup Y = A$ este $p = \frac{8}{31}$.

SOLUȚIE:

a) $n = \text{card}(A) = 5 \Rightarrow$ numărul submulțimilor mulțimii A este $2^n = 2^5 = 32$ 1p

b) Considerând o oarecare pereche ordonată de mulțimi $(X;Y)$ cu $X \cup Y = A$, la fiecare $x \in A$ vom avea exact una din cele trei posibilități de apartenență $x \in (X \setminus Y)$, $x \in (X \cap Y)$, $x \in (Y \setminus X)$ 1p

$\Rightarrow$ există $3^5 = 243$ perechi ordonate de mulțimi $(X;Y)$, cu $X \cup Y = A$ 1p

c) Dacă $(X;Y)$, cu $X \neq Y$ sunt două submulțimi nevide din A și cu $X \cup Y = A$, ele se pot alege în $3^5 - 3 = 240$ posibilități, deci sunt 240 cazuri favorabile 2p

$X \subseteq A$, $X \neq \varnothing$ se poate alege în $2^5 - 1 = 31$ moduri $(X \neq \varnothing)$ iar $Y \subseteq A$ se poate alege în $2^5 - 2 = 30$ moduri $(Y \neq \varnothing; Y \neq X) \Rightarrow$ sunt $(2^5 - 1)(2^5 - 2) = 31 \cdot 30$ cazuri total posibile 1p

$\Rightarrow p = \frac{240}{31 \cdot 30} = \frac{8}{31}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie $f:(2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+2\sqrt[3]{x^3-3x^2}+ax^n+b$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$ încât $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. Se cere:

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right)$.

b) Demonstrați că $n=1$ și $a=-3$.

c) Determinați valoarea lui b.

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right)=-1$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+2\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}+ax^{n-1}+\frac{b}{x}\right)$ 1p

$n=1$ 1p

pentru $n=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty(3+a)\Rightarrow$ condiția de limită finită obligă $a=-3$ 1p

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)+2\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right)+b\right]=-3+b$ 1p

$\Rightarrow b=3$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 2.

Considerăm mulțimea $M=\left\{X\in M_2(\mathbb{R})/\ X^2=X\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 2019\\ 0 & -4\end{pmatrix}$. Demonstrați afirmațiile:

a) $A\notin M$.
b) Mulțimea M are o infinitate de elemente.
c) I_2 este singura matrice inversabilă din M.
d) Matricea A nu poate fi scrisă ca sumă finită de matrice din M.

SOLUȚIE:

a) $A^2\neq A$, deci $A\notin M$ 1p

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, cu $X^2=X\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=a\\ b(a+d)=b\\ c(a+d)=c\\ bc+d^2=d\end{cases}$ 1p

$a+d\neq 1\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ sau $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$a+d=1\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 1-a\end{pmatrix}\Rightarrow a-a^2=bc\Rightarrow$ mulțimea M are o infinitate de elemente 2p

c) Fie $X\in M$ inversabilă $\Rightarrow X^{-1}\cdot X^2=I_2\Rightarrow\left(X^{-1}\cdot X\right)\cdot X=I_2\Rightarrow X=I_2$ 1p

d) Fie $A=A_1+A_2+\ldots+A_n$ cu $A_k=\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix}\in M$, $k\in\overline{1;n}$, $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 3=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $-4=\sum_{k=1}^{n}d_k$ 1p

$\Rightarrow -1=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+d_k\right)$ fals, deoarece $\left(a_k+d_k\right)\in\{0;1;2\}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Se cere:

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^4}\right)^x$.

b) Calculați $f'(3)$.

c) Demonstrați că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^4}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x=e^{-10}$ 3p

b) $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-1)(x-2)(x-4)=-2$ 2p

c) Apicând teorema lui Rolle funcției f pe intervalele $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ există $c_1\in(1;2)$, $c_2\in(2;3)$ și $c_3\in(3;4)$ cu $f'(c_1)=f'(c_2)=f'(c_3)=0$, deci $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale, ele fiind punctele Rolle menționate..... 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI –a

Problema 4.
O placă metalică a unui angrenaj are formă de triunghi dreptunghic ABC, cu catetele $AB = 24cm$ și $AC = 18cm$ iar pe ea culisează un vârf V care, prin intermediul unui senzor, măsoară spontan ariile $A(VAB)$, $A(VAC)$ și $A(VBC)$. Vârful V, de fiecare dată când constată egale două din cele trei arii, se deplasează asfel încât păstrază egalitatea și deplasarea are loc până când se obține egalitate la toate trei ariile. Un program de calculator arată reprezentarea plăcii pe un reper cartezian ortogonal (xOy), prin punctele $A(0;0)$, $B(24;0)$, $C(0;18)$ și vârful mobil $V(x;y)$ ale cărui coordonate sunt afișate în funcție de poziția lui pe placă.

a) Justificați $A(VAB) = A(VAC)$ când V este în poziția D a mijlocului ipotenuzei triunghiului ABC.
b) Arătați că din poziția D vârful V va descrie o dreaptă și determinați ecuația ei pe reperul calculatorului.
c) Determinați coordonatele vârfului V la momentul în care calculatorul afișează $A(VAB) = A(VAC) = A(VBC)$.

SOLUȚIE:
Demonstrează, fie analitic, fie sintetic:

a) $A(DAB) = A(DAC)$ 2p
b) Punctul V descrie dreapta suport a medianei AD 3p
c) Când $A(VAB) = A(VAC) = A(VBC)$, V este în poziția $G(8;6)$ a centrului de greutate a triunghiului ABC 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII –a

Problema 1.

O placă metalică a unui angrenaj, reprezentată într-un reper cartezian ortogonal (xOy), este delimitată de graficul funcției $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+p$, cu $p\in(0;+\infty)$, axele de coordonate și dreapta de ecuație $x=1$. Determinați:

a) Aria suprafeței plăcii.

b) Pentru ce valoare $p\in(0;+\infty)$ dreapta de ecuație $x=\frac{2}{3}$ împarte placa în două părți de arii egale.

c) Valorile p pentru care volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției f în jurul axei Ox este cel puțin egal cu $\frac{28\pi}{15}$

SOLUȚIE:

a) $A=\int_0^1\left(x^2+p\right)dx$ 1p

$A=\frac{3p+1}{3}$ 1p

b) Fie A_1 și A_2 ariile celor două suprafețe. Dacă $A_1=A_2$, atunci $A_1=\frac{1}{2}A$ 1p

$A_1=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(x^2+p\right)dx=\frac{8+54p}{81}$ 1p

$p=\frac{11}{27}$ 1p

c) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(p^2+\frac{2}{3}p+\frac{1}{5}\right)$ 1p

$\pi\left(p^2+\frac{2}{3}p+\frac{1}{5}\right)\geq\frac{28\pi}{15}\Rightarrow p\in[1;+\infty)$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 2.

Fie familia F de mulțimi M, definită prin $F=\{M / M \subseteq C^*,\ M \neq \varnothing,\ (\forall) x,\ y \in M \Rightarrow x \cdot y \in M\}$.

a) Verificați că $M=\{-1; 1; -i; i\}$ este mulțime a familiei F.

b) Dacă $M \in F$ și $z=1+i \in M$, calculați z^4 și deduceți că în acest caz M conține o infinitate de elemente.

c) Demonstrați că dacă o mulțime $M \in F$ are un număr finit de elemente și $z \in M$, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $z^n=1$.

d) Arătați că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ exisă $M \in F$ cu exact n elemente.

SOLUȚIE:

a) Verifică $M=\{-1; 1; -i; i\} \in F$ 1p

b) $z=1+i \in M \Rightarrow z^4=-4$ 1p
$-4 \in M$ 1p
$(-4)^n \in M$, $(\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ dacă $M \in F$ și $z=1+i \in M$ atunci M conține o infinitate de elemente 1p

c) Fie $M \in F$ cu exact $k \in \mathbb{N}^*$ de elemente și $z \in M \Rightarrow z \neq 0$ și $z, z^2, ..., z^k, z^{k+1} \in M$ 1p
$\Rightarrow$ există $i<j$ cu $z^i=z^j \Rightarrow z^{j-i}=1 \Rightarrow$ există $n=j-i \in \mathbb{N}^*$ cu $z^n=1$ 1p

d) $M=\{z \in \mathbb{C} / z^n=1\} \in F$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 3.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X(a)\in M_2(\mathbb{R}) / X(a)=I_2+aA, a>-\frac{1}{2}\right\}$. Se cere:

a) Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G.

b) Demonstrați că $(G;\cdot)$ este grup abelian.

c) Demonstrați că funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(X(a))=\ln(2a+1)$ este izomorfism între grupurile $(G;\cdot)$ și $(\mathbb{R};+)$.

d) Calculați $X\left(\frac{1}{2}\right)\cdot X\left(\frac{3}{2}\right)\cdot X\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{2n-1}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

SOLUȚIE:

a) $A^2=2A \Rightarrow X(a)\cdot X(b)=X(a+b+2ab)$ 1p

și $a+b+2ab>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4ab+2a+2b+1>0 \Leftrightarrow (2a+1)(2b+1)>0$ care se verifică 1p

b) Comutativitate, asociativitate, element neutru $I_2=X(0)\in G$ 1p

Fiecare $X(a)\in G$ este simetrizabil, cu simetricul $X'(a)=X\left(\frac{-a}{1+2a}\right)\in G$ 1p

c) $f(X(a))=\ln(2a+1)$ bijectivă 1p

și $f(X(a)\cdot X(b))=f(X(a))+f(X(b))$ 1p

d) $f\left(X\left(\frac{1}{2}\right)\cdot X\left(\frac{3}{2}\right)\cdot X\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{2n-1}{2}\right)\right)=f\left(X\left(\frac{1}{2}\right)\right)+f\left(X\left(\frac{3}{2}\right)\right)+f\left(X\left(\frac{5}{2}\right)\right)+\ldots+f\left(X\left(\frac{2n-1}{2}\right)\right)=$

$=\ln(2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n))=\ln(2^n\cdot n!) \Rightarrow X\left(\frac{1}{2}\right)\cdot X\left(\frac{3}{2}\right)\cdot X\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{2n-1}{2}\right)=X\left(\frac{2^n n!-1}{2}\right)$.....1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 4.

Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$ considerăm ecuația $x^3 + x - t = 0$. Se cere:

a) Arătați că ecuația are o singură soluție reală, pe care o notăm $x(t)$.

b) Determinați $x(0)$ și $x(2)$.

c) Calculați $\int_0^2 x(t)\,dt$.

SOLUŢIE:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \ldots = -2 < 0$ 2p

$\Rightarrow$ ecuația are o singură soluție reală 1p

b) $t = 0 \Rightarrow x^3 + x = 0 \Rightarrow x(0) = 0$ 1p

$t = 2 \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow x(2) = 1$ 1p

c) Cu substituția $t = u^3 + u$, $x^3 + x - u^3 - u = 0 \Rightarrow x\left(u^3 + u\right) = u$ 1p

$\Rightarrow \int_0^2 x(t)\,dt = \int_0^1 u\left(3u^2 + 1\right)du = \frac{5}{4}$ 1p