CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE
SUBIECTE - clasa a IX-a

1. Arătaţi că, dacă numerele reale $x,\ 3x+1,\ 8x-1$, sunt, în această ordine, în progresie aritmetică, atunci numerele $x,\ \sqrt{3x+1},\ x+3$ sunt, în această ordine, în progresie geometrică.
Studiaţi dacă reciproca este adevărată.

2. Se consideră expresiile $E(x)=|2x-3|, F(x)=|3x-4|$ şi $G(x,y)=4x+5y,\quad x,y\in\mathbb{R}$.

.

(a) Determinaţi cel mai mic număr întreg k pentru care numerele $E(k)<2$.

(b) Determinaţi mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x+F(x)=2\}$.

(c) Calculaţi cea mai mare valoare a expresiei $G(x,y)$, ştiind că $E(x)\le 2$ şi $F(y)\le 3$.

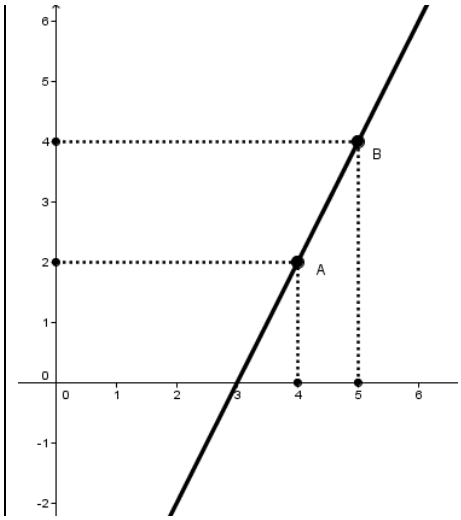
3. a) Dacă $0\le\alpha\le\beta$ demonstraţi că $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\le\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

b) Dacă $a,b,c\ge 0$ astfel încât $0\le a\le b+c$, demonstraţi că $\dfrac{a}{1+a}\le\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

4.

Dreapta din figura alăturată reprezintă graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.

Calculaţi $s=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots f(13)$ şi $p=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(13)$



NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE
SUBIECTE - clasa a X-a

1. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini și apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

2. Se consideră numărul complex $z=a+2i$, unde $i^2=-1$ şi $a\in(0,+\infty)$.

Determinaţi numărul real a în fiecare dintre următoarele cazuri.

(a) $z+z\cdot\bar{z}+\bar{z}=12$, unde numărul $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z;

(b) numărul z este o soluţie ecuaţiei $x^2-2x+5=0$.

3. Pentru orice numere reale x, y se notează $x\circ y=x+y+xy$.

(a) Arătaţi că numărul $k=2\circ\frac{1}{3}$ este întreg;

(b) Determinaţi numărul real x pentru care $\left(3^x\right)\circ 3=7$.

4. Se dă funcția $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{\sqrt{3}-1}\left(7-2\sqrt{x}-x\right)$.

a) Arătați că domeniul de definiție este $D=\left[0,9-4\sqrt{2}\right)$

b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE

Barem de evaluare și notare

1. Arătaţi că, dacă numerele reale $x,\ 3x+1,\ 8x-1$, sunt, în această ordine, în progresie aritmetică, atunci numerele $x,\ \sqrt{3x+1},\ x+3$ sunt, în această ordine, în progresie geometrică.
Studiaţi dacă reciproca este adevărată.

2. Se consideră expresiile $E(x)=|2x-3|, F(x)=|3x-4|$ şi $G(x,y)=4x+5y,\quad x,y\in\mathbb{R}$.

.

(a) Determinaţi cel mai mic număr întreg k pentru care numerele $E(k)<2$.

(b) Determinaţi mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x+F(x)=2\}$.

(c) Calculaţi cea mai mare valoare a expresiei $G(x,y)$, ştiind că $E(x)\le 2$ şi $F(y)\le 3$.

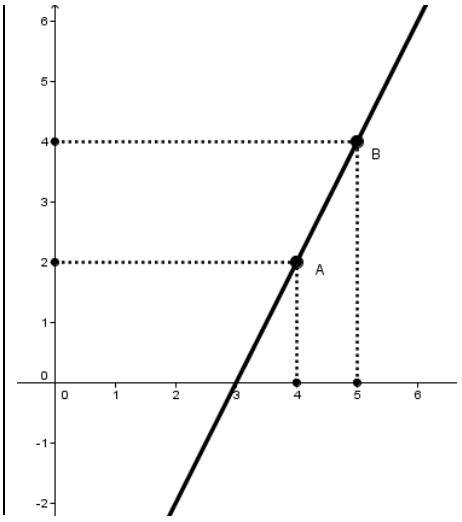
3. a) Dacă $0\le\alpha\le\beta$ demonstrați că $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\le\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

b) Dacă $a,b,c\ge 0$ astfel încât $0\le a\le b+c$, demonstrați că $\dfrac{a}{1+a}\le\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

4.

Dreapta din figura alăturată reprezintă graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.

Calculaţi $s=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots f(13)$ şi $p=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(13)$



(1) $3x+1=\dfrac{x+8x-1}{2}\Rightarrow x=1$	**(4p)**
Dacă $x,\ x+1, 3x+1$ sunt în progresie geometrică, atunci $x,\ (x+1)^2=x(3x+1)\Rightarrow x=1$ sau $x=-\dfrac{1}{2}$; pentru $x=-\dfrac{1}{2}$ primele trei numere nu sunt în	**(3p)**

progresie aritmetică, aşadar reciproca este falsă.	
(2) (a) Considerăm $\lvert 2k-3\rvert<2\Leftrightarrow -2<2k-3<2\Leftrightarrow \frac{1}{2}<k<\frac{5}{2}$; numărul căutat $k=1$	**(3p)**
(b) $A=\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$	**(2p)**
(c) $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right], y\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]\Rightarrow G_{\max}=\frac{65}{3}$	**(2p)**
(3) a). Demonstrează că $\frac{\alpha}{1+\alpha}\leq\frac{\beta}{1+\beta}$	**(3p)**
b). Demonstrează că $\frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$	**(4p)**
(4) $A(4,2), B(5,4)\in G_f\Rightarrow 4a+b=2,5a+b=4$	**(3p)**
$f(x)=2x-6$	**(2p)**
$s=104, p=0$	**(2p)**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

1. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini și apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

2. Se consideră numărul complex $z=a+2i$, unde $i^2=-1$ și $a\in(0,+\infty)$.

Determinați numărul real a în fiecare dintre următoarele cazuri.

(a) $z+z\cdot\bar{z}+\bar{z}=12$, unde numărul $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z;

(b) numărul z este o soluție ecuației $x^2-2x+5=0$.

3. Pentru orice numere reale x, y se notează $x\circ y=x+y+xy$.

(a) Arătați că numărul $k=2\circ\frac{1}{3}$ este întreg;

(b) Determinați numărul real x pentru care $\left(3^x\right)\circ 3=7$.

4. Se dă funcția $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\sqrt{3}-1}\left(7-2\sqrt{x}-x\right)$.

a) Arătați că domeniul de definiție este $D=\left[0,9-4\sqrt{2}\right)$

b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f.

1) Se notează cu x numărul de pagini citite pe zi și se ajunge la ecuația $31\cdot x=\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+1\right)+\ldots+\left(\frac{x}{4}+30\right)$	**(3)**
Se obține $x=20$	**(3p)**
Cartea are 620 de pagini	**(1p)**
2) (a) $a+2i+(a+2i)(a-2i)+a-2i=12\Rightarrow a^2+2a-8=0;$ $a=2\in(0,+\infty), a=-4\notin(0,+\infty)$	**(4p)**
(b) $x^2-2x+1=-4\Rightarrow(x-1)^2=(2i)^2\Rightarrow x=1\pm 2i\Rightarrow a=1$	**(3p)**
3) (a) $k=3\in\mathbb{Z}$	**(3p)**
(b) $\left(3^x\right)\circ 3=7\Rightarrow 4\cdot 3^x=4\Rightarrow x=0$	**(4p)**
4) a) Din condiția de existență $\Rightarrow 7-2\sqrt{x}-x>0$	**(1p)**
Not. $\sqrt{x}=t, t>0\Rightarrow t^2+2t-7<0$	**(1p)**
Se obține $t\in\left(0,-1+2\sqrt{2}\right)$	**(1p)**

De unde $\Rightarrow x\in\left(0,9-4\sqrt{2}\right)$	**(1p)**
b) cum $x\in\mathbb{Z}$ și $x\in\left(0,9-4\sqrt{2}\right)\Rightarrow x\in\{0,1,2,3\}$	**(2p)**
se verifică și se obține $f\left(3\right)=2$	**(1p)**