CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a IX-a

1.

(a) Arătaţi că şirul definit prin $a_n = 4n-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este o progresie aritmetică;

(b) Stabiliţi care dintre numerele 2015 şi 2018 este termen al şirului $a_n = 4n-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

(c) Pentru orice progresie aritmetică $(x_n)_{n\geq 1}$ se notează $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi S_{19} ştiind că $x_1 + x_8 + x_{12} + x_{19} = 400$.

2. Din mulțimea $\{-2,-1,0,1,2\}$ se aleg la întâmplare două elemente a și b , nu neapărat distincte. Care este probabilitatea ca ecuația $x^2 + 2ax + b = 0$ să admită rădăcini reale?

3. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

a) Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot ....\cdot f(2017)$.

b) Demonstrați că $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$, oricare ar fi $x,y\in(0,+\infty), x\neq y$

c) Stabiliți monotonia funcției f .

4. Fie triunghiul echilateral ABC având latura de lungime 1 și $M\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstrați că $AM<1$

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a X-a

1. Stabiliţi care dintre următoarele numere sunt întregi:

$a=\sqrt{32}-\sqrt{2}+\sqrt{\frac{80}{5}}-\sqrt{18}$, $b=\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{216}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$ şi $c=2\cdot\log_5 3-\log_5 90+\log_5 2$.

2. Demonstraţi că expresia de mai jos nu depinde de x :

$$E=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\ldots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x\ ,$$

$n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, x>0, x\neq 1$.

3. Se dă funcţia $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\sqrt{3}-1}\left(7-2\sqrt{x}-x\right)$.

a) Arătaţi că domeniul de definiţie este $D=\left[0,9-4\sqrt{2}\right)$

b) Găsiţi punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcţiei f .

4. Se consideră mulţimile $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,5^x\leq 25\right\}$ şi $B_n=\{\log_2 1,\log_2 2,\log_2 3,\ldots,\log_2 n\}$, unde n este un număr natural nenul.

(a) Determinaţi $C=A\cap B_{20}$;

(b) Determinaţi numerele naturale n pentru care mulţimea B_n conţine exact cinci numere întregi.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2007\\1\\0\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ cu $x,y,z\in\mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația $A^{2008}\cdot X=B$.

2. a) Calculaţi limita $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[3x]}{x}$;

b) Determinaţi asimptotele funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x\cdot|x|}{x-1}$.

3. Se dă funcția $f:\mathrm{D}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\dfrac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției f .

b) Să se studieze continuitatea funcției f .

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ și $M_t=\dfrac{t}{2}\cdot A+\dfrac{1}{2t}\cdot B, t>0$.

a) Calculați $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$.

b) Verificați identitatea $M_t\cdot M_v=M_{t\cdot v}, (\forall)t,v>0$.

c) Arătați că pentru orice $t>0$ matricea M_t este inversabilă.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a XII-a

1. a) Demonstrați că $\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right),(\forall)x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int\frac{x^2+x-3}{x^2-4}dx, x\in(2,\infty)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+3, x<1\\ ax^2+x+2, x\geq 1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$

a) Să se determine a astfel încât f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru a determinat anterior, să se calculeze $\int f(x)dx$.

3. Fie $M=R$ și legea $x*y=xy-2x-2y+6,(\forall)x,y\in M$.

Calculați $N=1*2*...*2018$.

4. Fie $G=(-1,2)$ și $x*y=\frac{xy+4x+4y-2}{2xy-x-y+5},(\forall)x,y\in G$ și $f:G\to(0,\infty), f(x)=\frac{-x+2}{x+1}$.

Arătați că f este izomorfism de la $(G,*)$ la $((0,\infty),\bullet)$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI

Barem de evaluare și notare

1.

(a) Arătaţi că şirul definit prin $a_n = 4n-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este o progresie aritmetică;

(b) Stabiliţi care dintre numerele 2015 şi 2018 este termen al şirului $a_n = 4n-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

(c) Pentru orice progresie aritmetică $(x_n)_{n\geq 1}$ se notează $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi S_{19} ştiind că $x_1 + x_8 + x_{12} + x_{19} = 400$.

2. Din mulțimea $\{-2,-1,0,1,2\}$ se aleg la întâmplare două elemente a și b , nu neapărat distincte. Care este probabilitatea ca ecuația $x^2 + 2ax + b = 0$ să admită rădăcini reale?

3. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

a) Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot ....\cdot f(2017)$.

b) Demonstrați că $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$, oricare ar fi $x, y \in (0,+\infty), x \neq y$

c) Stabiliți monotonia funcției f .

4. Fie triunghiul echilateral ABC având latura de lungime 1 și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstrați că $AM < 1$

(1) (a) $a_{n+1} - a_n = 4, \forall n \geq 1 \Rightarrow$ şirul este o progresie aritmetică	**(3p)**
(b) $4n-1=2015 \Rightarrow n=504, a_{504}=2015$ $4n-1=2018 \Rightarrow n=\dfrac{2019}{4} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ 2018 nu este termen al progresiei	**(2p)**
(c) propusă $x_1 + x_8 + x_{12} + x_{19} = 400 \Rightarrow 4x_1 + 36r = 400 \Rightarrow 2x_1 + 18r = 200$; $S_{19} = 1900$	**(2p)**
(2) pune condiția $\Delta \geq 0 \Rightarrow a^2 - b \geq 0$	**(1p)**
calculează $5\cdot 5$ cazuri posibile	**(2p)**
determină 21 de cazuri favorabile	**(2p)**

scrie probabilitatea $P=\frac{21}{25}$	**(2p)**
(3) a) calculează și obține 2018	**(2p)**
b) calcul și demonstrație	**(3p)**
c) arată că funcția e descrescătoare	**(2p)**
(4) a). Calculează $\overline{AM}$ în funcție de $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$	**(4p)**
b). Demonstrează inegalitatea	**(3p)**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

1. Stabiliţi care dintre următoarele numere sunt întregi:

$a=\sqrt{32}-\sqrt{2}+\sqrt{\frac{80}{5}}-\sqrt{18}$, $b=\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{216}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$ şi $c=2\cdot\log_5 3-\log_5 90+\log_5 2$.

2. Demonstraţi că expresia de mai jos nu depinde de x :

$$E=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\ldots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x\ ,$$

$n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, x>0, x\neq 1$.

3. Se dă funcţia $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\sqrt{3}-1}\left(7-2\sqrt{x}-x\right)$.

a) Arătaţi că domeniul de definiţie este $D=\left[0,9-4\sqrt{2}\right)$

b) Găsiţi punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcţiei f .

4. Se consideră mulţimile $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,5^x\leq 25\right\}$ şi $B_n=\{\log_2 1,\log_2 2,\log_2 3,\ldots,\log_2 n\}$, unde n este un număr natural nenul.

(a) Determinaţi $C=A\cap B_{20}$;

(b) Determinaţi numerele naturale n pentru care mulţimea B_n conţine exact cinci numere întregi.

(1) $a=4\in\mathbb{Z}$	**(3p)**
$b=-6\in\mathbb{Z}$	**(2p)**
$c=-1\in\mathbb{Z}$	**(2p)**
(2) Se trec toţi logaritmii în baza 2 şi se obţine $E=\frac{1}{\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{2}{\log_2 x}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\log_2 x}\cdot\frac{3}{\log_2 x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\frac{n-1}{\log_2 x}\cdot\frac{n}{\log_2 x}}-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x$	**(2p)**
Se ajunge la $E=\log_2^2 x\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x$	**(3p)**
Se fac calcule şi se ajunge la $E=\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x=0$	**(2p)**

(3) a) Din condiția de existență $\Rightarrow 7-2\sqrt{x}-x>0$	**(1p)**
Not. $\sqrt{x}=t, t>0 \Rightarrow t^2+2t-7<0$	**(1p)**
Se obține $t\in\left(0,-1+2\sqrt{2}\right)$	**(1p)**
De unde $\Rightarrow x\in\left(0,9-4\sqrt{2}\right)$	**(1p)**
b) cum $x\in\mathbb{Z}$ și $x\in\left(0,9-4\sqrt{2}\right)\Rightarrow x\in\{0,1,2,3\}$	**(2p)**
se verifică și se obține $f(3)=2$	**(1p)**
(4) (a) Pentru $A=\{0,1,2\}, B_{20}=\{\log_2 1,\log_2 2,...,\log_2 20\}$; în B_{20} sunt naturale doar numerele $\log_2 1=0,\log_2 2=1,\log_2 4=2,\log_2 8=3,\log_2 16=4\Rightarrow C=A$	**(4p)**
(b) $n\in\{16,17,18,...,31\}$	**(3p)**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2007\\1\\0\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ cu $x,y,z\in\mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația $A^{2008}\cdot X=B$.

2. a) Calculaţi limita $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[3x]}{x}$;

b) Determinaţi asimptotele funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x\cdot|x|}{x-1}$.

3. Se dă funcția $f:\mathrm{D}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\dfrac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției f .

b) Să se studieze continuitatea funcției f .

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ și $M_t=\dfrac{t}{2}\cdot A+\dfrac{1}{2t}\cdot B, t>0$.

a) Calculați $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$.

b) Verificați identitatea $M_t\cdot M_v=M_{t\cdot v}, (\forall)t,v>0$.

c) Arătați că pentru orice $t>0$ matricea M_t este inversabilă.

1. Demonstrează că $A^n=\begin{pmatrix}1&n&3n-1\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$	(3p)
Scrie $\begin{pmatrix}1&2008&6023\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2007\\1\\0\end{pmatrix}$	(2p)

Determină $X=\begin{pmatrix}\alpha-1\\1-3\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$	(2p)
2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[3x]}{x}=4$	(3p)
b) determinarea asimptotelor verticale $(x=1)$	(1p)
determinarea asimptotelor oblice $(y=-x-1)$ și $(y=x+1)$	(3p)
3. a) explicitare de modul	(1p)
condiții de existență	(1p)
determină $D=[0,4]$	(2p)
b) determină $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}, x\in[0,2)\\\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}, x\in[2,4]\end{cases}$	(1p)
limite laterale în $x=2$	(1p)
finalizare	(1p)
Se va puncta la maxim dacă observă că f este o compunere de funcții continue	
4. a) pentru fiecare calcul se acordă câte un punct	(4p)
b) folosind informațiile de la punctul a) se obține cerința	(1p)
c) calculează determinantul și arată că e nenul	(2p)

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

1. a) Demonstrați că $\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right),(\forall)x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int\frac{x^2+x-3}{x^2-4}dx, x\in(2,\infty)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+3, x<1\\ ax^2+x+2, x\geq 1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$

a) Să se determine a astfel încât f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru a determinat anterior, să se calculeze $\int f(x)dx$.

3. Fie $M=R$ și legea $x*y=xy-2x-2y+6,(\forall)x,y\in M$.

Calculați $N=1*2*...*2018$.

4. Fie $G=(-1,2)$ și $x*y=\frac{xy+4x+4y-2}{2xy-x-y+5},(\forall)x,y\in G$ și $f:G\to(0,\infty), f(x)=\frac{-x+2}{x+1}$.

Arătați că f este izomorfism de la $(G,*)$ la $((0,\infty),\bullet)$.

1. a) verificare	(3p)
b) obține $x+\frac{3}{4}\ln(x-2)+\frac{1}{4}\ln(x+2)+C$	(4p)
2. a) din condiția $f(1)=l_s(1)=l_d(1)$ se obține $a=1$	(3p)
b) obține primitivele de forma $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+3x+C_1, x<1\\ \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+C_2, x\geq 1\end{cases}$	(3p)
obține $C_2=C_1+\frac{2}{3}$	(1p)
3. Stabilește că $x*2=2,\forall x\in\mathbb{R}$	(1p)
Stabilește că $2*x=2,\forall x\in\mathbb{R}$	(1p)
Scrie $N=1*2*...*2018=1*2*b$ unde $b=3*...*2018$	(3p)
Finalizare	(2p)
4. Calculează $f(x*y)=\frac{xy-2x-2y+4}{xy+x+y+1}$	**(2p)**

Calculează $f(x)\cdot f(y)=\dfrac{xy-2x-2y+4}{xy+x+y+1}$	**(2p)**
Demonstrează injectivitatea	**(2p)**
Demonstrază surjectivitatea	**(1p)**