MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX-a

Problema 1. a) Determinați numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$, știind că împărțind 9917 la n^2+n obținem câtul 28 și restul cel mai mare posibil.

b) Dați două exemple de numere raționale pozitive x, care să nu fie numere naturale, astfel încât $\frac{x}{2x-3}$ să fie număr natural.

Problema 2. Demonstrați următoarele inegalități:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2, (\forall) a,b \in (0,\infty)$;

b) $22 \leq \frac{\overline{ab}}{a}+\frac{\overline{ba}}{b} \leq \frac{262}{9}$, oricare ar fi cifrele nenule a și b. În ce caz avem egalitate?

Problema 3. Se consideră triunghiul ΔABC în care $m(\measuredangle A)=90^\circ, m(\measuredangle C)=30^\circ$, punctul D este mijlocul segmentului $[BC]$, iar punctul $E \in (AC)$ astfel încât $AC=3\cdot AE$. Să se demonstreze că:

a) ΔABD este echilateral;

b) $BE \perp AD$.

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC având medianele $(AM), (BN), (CP)$. Să se demonstreze că se poate construi un triunghi cu vectorii :

a) $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$;

b) $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$, unde $\{G\} = AM \cap BN \cap CP$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2-\frac{1}{2\cdot x}\right)^n$, $x\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați valoarea lui *n*, știind că suma coeficienților primilor trei termeni ai dezvoltării este cel mult egală cu 4.

b) Pentru $n=8$, determinați termenul care-l conține pe x^{10}.

Problema 2. După fiecare an de utilizare, prețul unui autoturism scade cu 10% din valoarea avută la începutul anului.

a) Determinați prețul unui autoturism după trei ani de utilizare , știind că prețul de achiziție a fost de 10000 de euro.

b) După câți ani autoturismul pierde cel puțin 90% din valoarea inițială ? (Se poate folosi $\lg 3=0,477$)

Problema 3. Într-un sistem de axe de coordonate *xOy* se consider punctele $A_n(n,1)$, $B_n(1,n)$ $n\in\mathbb{N}^*$ și mulțimea $M=\{A_1,A_2,A_3,B_2,B_3\}$.

a) Câte drepte determină elementele mulțimii M ?

b) Câte triunghiuri determină elementele mulțimii M ?

c) Demonstrați că punctele A_1,P,Q sunt coliniare, unde $\{P\}=A_2B_3\cap A_3B_2$ și Q este mijlocul segmentului A_3B_3.

Problema 4. Să se determine $tg(x)$, știind că $\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x+\cos x)\right]=\log_{a^2}(\sin x)+\log_{a^2}(\cos x)$, unde $a\in(1,\infty)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI -a

Problema 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați C^{-1}.

b) Determinați matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ dacă $CA=XC$.

c) Determinați matricea $X^n, n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, unde X este matricea determinată la punctul **b)**.

Problema 2. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{Q})$ cu $AB=BA$ și $\det(A)=1$.

a) Demonstrați că $A^3-B^3=(A-B)(A-\varepsilon B)(A-\varepsilon^2 B)$ unde ε este o rădăcină cubică complexă de ordinul trei a unității.

b) Considerând $f(x)=\det(A+xB)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Q}$ și $\det(A-\sqrt{7}B)=8$, calculați $\det\left(A^3-B^3\right)$.

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

a) Demonstrați că f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că $\left(x^2+1\right)f''(x)f(x)=f'(x), (\forall)x\in\mathbb{R}$.

Problema 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-2x}-x+a, a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției f

c) Demonstrați că f este bijectivă și aflați a știind că $f^{-1}(-2)=1$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII -a

Problema 1. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1} dt, n \geq 0.$

a) Calculați I_3.

b) Demonstrați că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

c) Demonstrați că numărul $A = I_0 + I_2 + I_4 + ... + I_{2020}$ este irațional.

Problema 2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A \mid A = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{Z}_4 \right\}, M \subset M_3(\mathbb{Z}_4)$, iar $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii M.

b) Demonstrați că oricare ar fi matricea $A \in M$, avem $A^2 = O_3$ sau $A^2 = I_3$.

c) Câte matrice din M au proprietatea că $A^2 = I_3$.? Scrieți aceste matrice.

Problema 3. Fie $f = X^3 - mX^2 + nX + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Determinați *m,n* dacă $x = -1$ este rădăcină dublă.

b) Demonstrați că, dacă *f* admite rădăcina $\sqrt{3}$ atunci *f* admite o rădăcină rațională. Determinați această rădăcină.

c) Fie $f(-2), f(1)$ cu numere impare. Demonstrați că *f* nu are rădăcini întregi.

Problema 4. Se consideră funcția $f : [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+6}$.

a) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției *f*, axa (*Ox*) și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 3$.

b) Determinați $m > 0$, astfel încât volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f(x+m)$ în jurul axei (*Ox*) să fie $\frac{2031\pi}{2}$.

c) Demonstrați că $\int_0^3 x^2 f(x) dx \leq 27.$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX-a

Problema 1. a) Determinați numărul natural $n\in\mathbb{N}^*$, știind că împărțind 9917 la n^2+n obținem câtul 28 și restul cel mai mare posibil.

b) Dați două exemple de numere raționale pozitive x, care să nu fie numere naturale, astfel încât $\frac{x}{2x-3}$ să fie număr natural.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Conform Teoremei împărțirii cu rest, cel mai mare rest ce poate fi obținut este n^2+n-1 ……**1p**

Înlocuind, obținem $9917=28\left(n^2+n\right)+n^2+n-1$ ……**1p**

Se obține $n^2+n-342=0$ ……**1p**

Ținând cont că $n\in\mathbb{N}^*$, se obține $n=18$ ……**1p**

b) Considerăm nişte valori naturale aleatorii pentru $\frac{x}{2x-3}$ ……**1p**

De exemplu, pentru $x=\frac{9}{5}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ se obține $\frac{x}{2x-3}=3$ și pentru $x=\frac{12}{7}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ se obține $\frac{x}{2x-3}=4$ ……**2p**

NOTĂ: Orice alte exemple corecte se punctează conform baremului!

Problema 2. Demonstrați următoarele inegalități:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\ (\forall)\, a,b\in(0,\infty)$;

b) $22\leq\frac{\overline{ab}}{a}+\frac{\overline{ba}}{b}\leq\frac{262}{9}$, oricare ar fi cifrele nenule *a* și *b*. În ce caz avem egalitate?

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$ ……**1p**

Obține $(a-b)^2\geq 0,(\forall)\, a,b\in(0,\infty)$, cu egalitate pentru $a=b$ ……**1p**

b) Obține $\frac{\overline{ab}}{a}+\frac{\overline{ba}}{b}=20+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ……**1p**

Prima inegalitate devine $22\leq 20+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, adevărată conform punctului anterior……**1p**

A doua inegalitate devine $20+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le\frac{262}{9}\Leftrightarrow 9a^2-82ab+9b^2\le 0$ ……**1p**

Obţine $9a^2-82ab+9b^2\le 0\Leftrightarrow (9a-b)(a-9b)\le 0$ ……**1p**

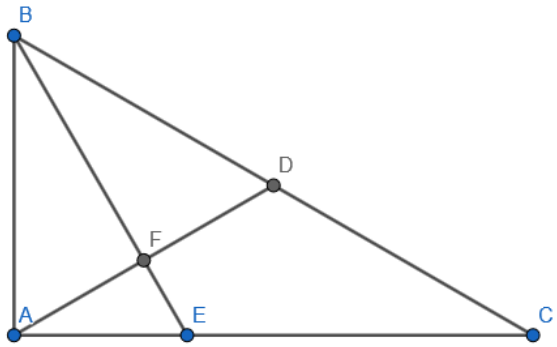
Deoarece $a,b\in\{1,2,...,9\}$, rezultă că $9a-b\ge 0$ şi $a-9b\le 0$, egalitatea fiind adevărată pentru $\overline{ab}\in\{19,91\}$ ……**1p**

Problema 3. Se consideră triunghiul ΔABC în care $m(\measuredangle A)=90^\circ, m(\measuredangle C)=30^\circ$, punctul D este mijlocul segmentului $[BC]$, iar punctul $E\in(AC)$ astfel încât $AC=3\cdot AE$. Să se demonstreze că:

a) ΔABD este echilateral;

b) $BE\perp AD$.

BAREM DE CORECTURĂ



a) Deoarece $[AD]$ este mediană în triunghiul dreptunghic ABC, rezultă că $AD=CD=BD$ ……**1p**

În triunghiul ADB avem : $DA=DB$ şi $m(\measuredangle B)=60^\circ$, deci ΔABD este echilateral……**2p**

b) Fie $\{F\}=BE\cap AD$. Aplicând teorema lui Menelaus în ΔADC cu transversala $E-F-B$, rezultă $\frac{DF}{FA}\cdot\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CB}{DB}=1$ ……**2p**

Deoarece $\frac{AE}{CE}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{CB}{DB}=2$ rezultă că $AF=DF$ ……**1p**

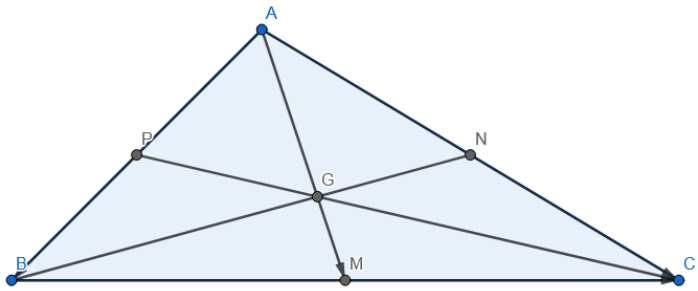
Deoarece ΔABD este echilateral, iar F este mijlocul $[AD]$, rezultă că $BE\perp AD$ ……**1p**

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC având medianele $(AM),(BN),(CP)$. Să se demonstreze că se poate construi un triunghi cu vectorii :

a) $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CP}$;

b) $\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}$, unde $\{G\}=AM\cap BN\cap CP$.

BAREM DE CORECTURĂ



$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ ……**1p**

a) Obţinem că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\vec{0}$……**3p**

b) Deoarece $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BN}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\right)=\vec{0}$, rezultă că se poate construi un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}$ ……**3p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2-\frac{1}{2\cdot x}\right)^n$, $x\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați valorile lui *n*, ştiind că suma coeficienţilor primilor trei termeni ai dezvoltării este cel mult egală cu 4.

b) Pentru $n=8$, determinaţi termenul care-l conţine pe x^{10}.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Obţine $C_n^0-\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{4}\le 4$ ……**1p**

Deduce $n^2-5n-24\le 0$ ……**1p**

Deoarece $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$ obţine $n\in\{2,3,4,...,8\}$ ……**2p**

b) Obţine $T_{k+1}=C_8^k x^{16-2k}\cdot\frac{(-1)^k}{2^k\cdot x^k}$ ……**1p**

Din condiţia $x^{16-3k}=x^{10}$, obţine $k=2$ ……**1p**

Finalizare: $T_3=C_8^2\cdot x^{10}\cdot 2^{-2}=7x^{10}$ este termenul căutat……**1p**

Problema 2. După fiecare an de utilizare, preţul unui autoturism scade cu 10% din valoarea avută la începutul acelui an.

a) Determinaţi preţul unui autoturism după trei ani de utilizare , ştiind că preţul de achiziţie a fost de 10000 de euro.

b) După câţi ani autoturismul pierde cel puţin 90% din valoarea iniţială? (Se poate folosi $\lg 3=0,477$)

BAREM DE CORECTURĂ

a) Fie P preţul iniţial şi P_i-preţul după i ani de utilizare.

$P_1=0,9\cdot P=9000$ **euro**……**1p**

$P_2=0,9\cdot P_1=8100$ **euro**……**1p**

$P_3=0,9\cdot P_2=7290$ **euro**……**1p**

b) După n ani de utilizare, preţul va deveni $P_n=\left(\frac{9}{10}\right)^n\cdot P$ ……**1p**

Este necesar ca $P_n\le\frac{P}{10}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{10}\right)^n\le\frac{1}{10}$ ……**1p**

Logaritmând, vom obţine $n(2\lg 3-1)\le -1\Leftrightarrow n\ge\frac{1000}{46}$ ……**1p**

Deoarece $n \in \mathbb{N}$, rezultă că după cel puţin 22 de ani pierde cel puţin 90% din valoarea iniţială..... **1p**

Problema 3. Într-un sistem de axe de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n,1)$, $B_n(1,n)$ $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimea $M = \{A_1, A_2, A_3, B_2, B_3\}$.

a) Câte drepte determină elementele mulţimii M ?

b) Câte triunghiuri determină elementele mulţimii M ?

c) Demonstraţi că punctele A_1, P, Q sunt coliniare, unde $\{P\} = A_2B_3 \cap A_3B_2$ şi Q este mijlocul lui $[A_3B_3]$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Prin punctele mulţimii trec 6 drepte ……..... **2p**
$(A_1A_2, A_1B_2, B_2A_2, B_2A_3, B_3A_2, B_3A_3)$

b) Elementele mulţimii M determină 8 triunghiuri , şi anume: $\Delta B_2A_1A_2$, $\Delta B_2A_1A_3$, $\Delta B_2A_2A_3$, $\Delta B_3A_1A_2$, $\Delta B_3A_1A_3$, $\Delta B_3A_2A_3$, $\Delta A_2B_2B_3$, $\Delta A_3B_2B_3$ ……..... **2p**

c) Obţine $Q(2,2)$ ……..... **1p**

Obţine $(A_2B_3): 2x + y - 5 = 0$ şi $(A_3B_2): x + 2y - 5 = 0$ şi, de aici, $P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ……..... **1p**

Deoarece $m_{A_1P} = m_{A_1Q} = 1$, rezultă că punctele A_1, P, Q sunt coliniare……..... **1p**

Problema 4. Să se determine $tg(x)$, ştiind că $\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right] = \log_{a^2}(\sin x) + \log_{a^2}(\cos x)$, unde $a \in (1, \infty)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

BAREM DE CORECTURĂ

Obţine $\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right] = \frac{\log_a(\sin x \cdot \cos x)}{2}$ ……..... **2p**

Obţine $2 \cdot \sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$ ……..... **2p**

Deoarece $\cos x \neq 0$, se obţine, prin împărţire, $2tg^2 x - 5tg\, x + 2 = 0$ ……..... **1p**

Obţine $tg\, x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ ……..... **1p**

Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă că $tg\, x < 1$, deci $tg\, x = \frac{1}{2}$ ……..... **1p**

SAU

$\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right] = \frac{1}{2}\log_a(\sin x \cdot \cos x)$ ……..... **2p**

Obţinem: $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right]^2 = \sin x \cdot \cos x$ ……..... **1p**

$\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$ ……..... **1p**

$\frac{2\text{tg}\, x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{tg}^2 x - 5\text{tg}\, x + 2 = 0$ ……..... **1p**

Rezultă $\text{tg}\, x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ ……..... **1p**

Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă că $\text{tg}\, x < 1$, deci $\text{tg}\, x = \frac{1}{2}$ ……..... **1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI –a

Problema 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați C^{-1}.

b) Determinați matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ dacă $CA=XC$.

c) Determinați matricea X^n, $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, unde X este matricea determinată la punctul b).

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\det C=4\Rightarrow(\exists)C^{-1}, C^t=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C^*=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$, $C^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ ……**2p**

b) $CA=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$

$XC=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+5b & a+3b\\ 3c+5d & c+3d\end{pmatrix}$

$$CA=XC\Leftrightarrow\begin{cases}3a+5b=4\\ a+3b=1\\ 3c+5d=8\\ c+3d=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{7}{4}\\ b=-\frac{1}{4}\\ c=\frac{9}{4}\\ d=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7 & -1\\ 9 & 1\end{pmatrix}$$ ……**2p**

SAU

$$X=CAC^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7 & -1\\ 9 & 1\end{pmatrix}$$ ……**2p**

c) Se demonstrează prin inducție matematică:

$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$ ……**1p**

Finalizare

$X^n=(CAC^{-1})\cdot(CAC^{-1})\cdot(CAC^{-1})\cdot\ldots\cdot(CAC^{-1})=(CA^2C^{-1})\cdot(CAC^{-1})\cdot\ldots\cdot(CAC^{-1})=$
$=(CA^3C^{-1})\cdot\ldots(CAC^{-1})=CA^nC^{-1}$ ……**1p**

$X^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3n+4 & -n\\ 9n & -3n+4\end{pmatrix}$ ……**1p**

Problema 2. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{Q})$ cu AB=BA și $\det(A)=1$.

a) Demonstrați că $A^3-B^3=(A-B)(A-\varepsilon B)\cdot(A-\varepsilon^2B)$ unde ε este o rădăcină cubică complexă de ordinul trei a unității.

b) Considerând $f(x)=\det(A+xB)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Q}$ și $\det(A-\sqrt{7}B)=8$, calculați $\det(A^3-B^3)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Verificare directă.

Se tine seama de ipoteză și de faptul că $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,\ \varepsilon \in \mathbb{C}$. ……**2p**

b) Avem $\left.\begin{matrix} f(0) = \det(A) \\ f(0) = c \\ \det(A) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 1$ ……**2p**

Din $f(-\sqrt{7}) = 8 \Rightarrow 7a - \sqrt{7}b + 1 = 8 \Rightarrow 7a - 7 - \sqrt{7}b = 0,\quad a, b \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$ ……**1p**

Finalizare

$\det(A^3 - B^3) = \det(A - B)\det(A - \varepsilon B)\det(A - \varepsilon^2 B) = f(-1)f(-\varepsilon)f(-\varepsilon^2) = 2(\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon^4 + 1) =$

$2(\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon + 1) = 2(-\varepsilon)(-\varepsilon^2) = 2\varepsilon^3 = 2.$ ……**2p**

Problema 3. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Demonstrați că f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că $(x^2 + 1)f''(x)f(x) = f'(x), (\forall)x \in \mathbb{R}$

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$……**1p**

$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, deoarece $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$……**2p**

b) $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f(x)}{x^2+1}$……**1p**

Obținem că $(x^2 + 1)f''(x) = f'(x)\sqrt{x^2 + 1} - xf'(x)$……**1p**

Relație echivalentă cu $(x^2 + 1)f''(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{f'(x)}{f(x)}$, de unde rezultă concluzia……**2p**

Problema 4. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-2x} - x + a, a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

c) Demonstrați că f este bijectivă și aflați a știind că $f^{-1}(-2) = 1$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f'(x) = -2e^{-2x} - 1,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$ ……**1p**

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, deci f nu admite asimptote orizontale ……**2p**

$m_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$n_1 = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x\to\infty} (e^{-2x} + a) = a$

$y = -x + a$ asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcției……**1p**

$m_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, deci nu există asimptotă oblică spre $-\infty$. ……**1p**

c)

x	$-\infty$ ∞
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - -
$f(x)$	∞ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ $-\infty$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surjectivă.

f strict descrescătoare, deci injectivă și deci f bijectivă.

Din $-2 = f(1) \Leftrightarrow -2 = e^{-2} - 1 + a \Rightarrow a = -1 - e^{-2}$……**2p**

Notă:*Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}dt, n \geq 0.$

a) Calculați I_3.

b) Demonstrați că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

c) Demonstrați că numărul $A = I_0 + I_2 + I_4 + ... + I_{2020}$ este irațional.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $I_3 = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}dt = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ **2p**

b) $I_{2n} + I_{2n-2} = \int_0^1 \frac{t^{2n-2}\left(t^2+1\right)}{t^2+1}dt = \int_0^1 t^{2n-2}dt = \frac{1}{2n-1}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$ **2p**

c) $A = I_0 + \left(I_2 + I_4\right) + \left(I_6 + I_8\right) + ... + \left(I_{2018} + I_{2020}\right) =$ **2p**

$= \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2019} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **1p**

Problema 2.

Se consideră mulțimea $M = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}_4\}$, $M \subset M_3(\mathbb{Z}_4)$, iar $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii M.

b) Demonstrați că oricare ar fi matricea $A \in M$, avem $A^2 = O_3$ sau $A^2 = I_3$.

c) Câte matrice din M au proprietatea că $A^2 = I_3$? Scrieți aceste matrice.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $a \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$, $\hat{2}b \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$, $\hat{2}c \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$

Vor fi $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ elemente distincte în M..... **2p**

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a^2 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & a^2 \end{pmatrix}$, $a^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ **1p**

Dacă $a \in \{\hat{0}, \hat{2}\} \Rightarrow a^2 = \hat{0} \Rightarrow A^2 = O_3$ **1p**

Dacă $a \in \{\hat{1}, \hat{3}\} \Rightarrow a^2 = \hat{1} \Rightarrow A^2 = I_3$ **1p**

c) a ∈ { $\hat{1}, \hat{3}$}, $\hat{2}$b ∈ {$\hat{0}, \hat{2}$} , $\hat{2}$c ∈ {$\hat{0}, \hat{2}$}, deci 8 matrice au proprietatea cerută. ……**1p**

Finalizare……**1p**

Problema 3.

Fie $f = X^3 - mX^2 + nX + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Determinați m, n dacă $x = -1$ este rădăcină dublă.

b) Demonstrați că, dacă f admite rădăcina $\sqrt{3}$, atunci f admite o rădăcină rațională. Determinați această rădăcină.

c) Fie $m, n \in \mathbb{Z}$ cu $f(-2); f(1)$ numere impare. Demonstrați că f nu are rădăcini întregi.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f' = 3x^2 - 2mx + n,\ f'' = 6x - 2m$ ……**1p**

$\begin{cases} f(-1) = 0 \Leftrightarrow m + n = 4 \\ f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2m + n = -3 \\ f''(-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \Leftrightarrow m \neq -3 \end{cases}$

Obținem $m = -7, n = 11$ ……**1p**

b) $f \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow$ f admite și pe $-\sqrt{3}$ ca rădăcină.

Din $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) + x_3 = m \Rightarrow x_3 = m \in \mathbb{Q}$ ……**1p**

$x^2 - 3$ divide pe f, deci restul împărțirii lui f la ($x^2 - 3$) este 0, deci $(n + 3)x + 5 - 3m = 0$, rezultă $n = -3, m = \frac{5}{3}$ deci $x_3 = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ ……**1p**

c) Presupunem că avem o rădăcină întreagă $k \in \mathbb{Z}$.

Rezultă $\big(f(-2) - f(k)\big) \vdots (-2 - k) \Leftrightarrow f(-2) \vdots (-2 - k)$;.

$f(-2)$ este număr impar, deci k impar (3) ……**2p**

$\big(f(1) - f(k)\big) \vdots (1 - k) \Leftrightarrow f(1) \vdots (1 - k)$; $f(1)$ este număr impar, deci k par (4)

Din (3) și (4) obținem o contradicție.

Prin urmare f nu are rădăcini întregi. ……**1p**

Problema 4.

Se consideră funcția $f: [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 6}$.

a) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f, axa (Ox) și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 3$.

b) Determinați $m > 0$ astfel încât volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f(x + m)$ în jurul axei (Ox) să fie $\frac{2031\pi}{2}$.

c) Demonstrați că $\int_0^3 x^2 f(x)dx \leq 27$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Avem A = $\int_0^3 \sqrt{x + 6}$ dx

$\sqrt{x + 6} = t \Rightarrow x + 6 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2 - 6$, dx = 2tdt

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{6}\,; x = 3 \Rightarrow t = 3$ ……**1p**

$A = 2\int_{\sqrt{6}}^3 t^2 dt = 2\frac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{6}}^3 = 18 - 4\sqrt{6}$ ……**1p**

b) Avem ecuația $\pi \int_0^3 (x + 6 + m)dx = \frac{2031\pi}{2}$ ……**1p**

Finalizare $m = 334$ ……**1p**

c) Avem $\sqrt{6} \leq f(x) \leq 3 \Rightarrow \sqrt{6}\, x^2 \leq x^2 f(x) \leq 3x^2$ ……**1p**

Integrăm pe [0, 3] și obținem

$\sqrt{6}\int_0^3 x^2 dx \leq \int_0^3 x^2 f(x)dx \leq 3\int_0^3 x^2 dx$ ……**1p**

Finalizare ……**1p**