CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a IX-a

1. Determinați mulțimile:
a) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| x = \frac{4n+1}{2n-1}, n \in \mathbb{Z}\right\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{R} | \ [2x+1] = -3\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} | \ |-3x-2| = 4\}$.

2. Arătați că:
a) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$;
b) dacă $n \geq 5$, atunci $2^n > n^2$.

3. Considerăm dreptunghiul *ABCD* și punctele *E*, *F* și *M*, astfel încât $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Dacă *N* este mijlocul lui (*EF*), arătați că punctele *M*, *A*, *N* sunt coliniare.

4. Fie ΔABC și punctele *D* și *E*, astfel încât $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE}$.
a) Scrieți vectorul $\overrightarrow{DE}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$;
b) Fie $F \in AB$, astfel încât $FC \parallel DE$. Aflați $\overrightarrow{FB}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2016
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a X-a

1. a) Calculați $\sqrt[3]{\frac{4\cdot\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{3\cdot\sqrt[12]{3}}$;

b) Arătați că numărul $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ este rațional.

2. a) Calculați : $lg\frac{1}{2}+lg\frac{2}{3}+\cdots+lg\frac{9}{10}$;

b) Exprimați numărul $N=log_3\sqrt[5]{72}$ în funcție de numărul $a=log_2 3$.

3. a) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+2$ este bijectivă și determinați inversa ei.

b) Determinați parametrul real *m* pentru care funcția următoare este bijectivă:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-x+1,\ x\leq 1\\ -2x+m,\ x>1\end{cases}$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $x^2+2x+2=0$;

b) $z^2+(2-i)z-2i=0$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Determinați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} 3^x & x \\ 1 & 2^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^x & -1 \\ -x & 18^x \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 2-x & 0 \\ -2 & 3+x & -1 \end{vmatrix} = 0$;

3. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 5^x}{x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ln(x^2+6x-6)}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \left(\left[\frac{1}{x^2} \right] + \left[\frac{2}{x^2} \right] + \left[\frac{3}{x^2} \right] \right)$.

4. Determinați constantele reale a și b pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \le 2 \\ \log_2 x, & x \in (2,4) \\ ax^2 + bx + 6, & x \ge 4 \end{cases}$$ are limită în punctele $x_1 = 2$ și $x_2 = 4$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a XII-a

1. Fie mulțimea $G = (5, \infty) \setminus \{6\}$ și legea definită pe *G* astfel: $x \star y = (x-5)^{ln(y-5)} + 5$, $(\forall) x, y \in G$. Se cere:
a) Arătați că legea este comutativă;
b) Determinați elementul neutru al legii;
c) Rezolvați ecuația: $x \star x \star x \star x = e^{16} + 5$.

2. Se consideră grupul comutativ $(G, \circ)$, unde $G = (-2, \infty)$ și legea definită pe *G* astfel: $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, $(\forall) x, y \in G$. Se cere:
a) Calculați $(-2017) \circ (-2016) \circ ... \circ 0 \circ 1 \circ ... \circ 2017$;
b) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to G, f(x) = e^x - 2$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, \circ)$.

3. Fie mulțimea $H = (0, 1)$ și aplicația $x * y = \frac{xy}{2xy+1-(x+y)}$. Arătați că *H* este parte stabilă în raport cu legea „$*$".

4. Calculați:
a) $\int ln(x^2 + 1)\, dx$;
b) $\int sin^3 x \cdot cos^2 x\, dx$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
BAREM - clasa a IX-a

1. a) $x = 2 + \frac{3}{2n-1} \in \mathbb{Z}$ ... 1p
$\Leftrightarrow 2n - 1 \in \{\pm 1, \pm 3\} \Leftrightarrow A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ...1p
b) $-3 \leq 2x + 1 < -2$ ...1p
$B = [-2, -\frac{3}{2})$ ...1p
c) $-3x - 2 = 4$ sau $-3x - 2 = -4$ ...1p
$x = -2$ sau $x = \frac{2}{3}$ ...1p
$C = \{-2\}$ ...1p

2. a) inductie corectă completă ...4p
b) inducție corectă completă ...3p

3. fig. corectă ...1p
determină $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ...2p
determină $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ...3p
finalizare ...1p

4. a) $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ...2p
b) relație asemănare corectă ...1p
determină $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ...4p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.
Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
BAREM - clasa a X-a

1. a) scrie corect radicalii ca putere ...1p
calcule, finalizare: $\frac{2}{3}$ ...2p
b) $a = \left|3 + 2\sqrt{2}\right| - \left|\sqrt{2} - 1\right| - \left|2 + \sqrt{2}\right|$ ...2p
$a = 2 \in \mathbb{Q}$ ...2p

2. a) -1 ...3p
b) $N = \frac{\frac{1}{5}log_2(9 \cdot 8)}{log_2 3}$ ...2p
$N = \frac{2a+3}{5a}$ ...2p

3. a) dem.că f – inj. ...1p
dem.că f – surj. ...1p
deduce existența inversei și o determină ...1p
b) $Imf_1 = [0, \infty)$ ...1p
$Imf_2 = (-\infty,\ m - 2)$ ...1p
Condiție de bijectivitate și determină $m = 2$ ...2p

4. a) $S = \{-1 + i,\ -1 - i\}$ ...2p
b) determină $\Delta = (2 + i)^2$ ...3p
$S = \{i,\ -2\}$ ...2p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.
Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
BAREM - clasa a XI-a

1. Scrie $A = I_3 + B$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și dezvoltă $(I_3 + B)^n$ ...3p

Calculează puterile lui B ...1p

Scrie $A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$ ...1p

Determină A^n ...2p

2. a) ajunge la ecuația $6^x = 6^{2x}$ ...2p

determină $S = \{0\}$ ...2p

b) calculează și determină $x = 0$ ...3p

3. a) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 5^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x} = ln\frac{3}{5}$ ...2p

b) $\lim_{x\to 1} \frac{ln(x^2+6x-6)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{ln[(x-1)(x+7)+1]}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{ln[(x-1)(x+7)+1]}{(x-1)(x+5)}(x+7) = 8$ ...2p

c) scrie $\frac{1}{x^2} - 1 < \left[\frac{1}{x^2}\right] \leq \frac{1}{x^2} \mid \cdot x^2$ și trece la limită $\Longrightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \left[\frac{1}{x^2}\right] = 1$ ...2p

obține analog $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \left[\frac{2}{x^2}\right] = 2$ și $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \left[\frac{3}{x^2}\right] = 3$ și finalizează ...1p

4. din $l_s(2) = l_d(2) \Rightarrow 2a + b = 1$ ...2p

din $l_s(4) = l_d(4) \Rightarrow 4a + b = -1$ ...2p

rezolvă sistemul ...2p

finalizare: $a = -1, b = 3$ ...1p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.
Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a XII-a

1. a) comutativitate ...1p
b) elementul neutru $e+5$ ...2p
c) calculează $x \star x \star x \star x = (x-5)^{ln^3(x-5)} + 5$ ...2p
găsește $x = e^2 + 5$ ...2p

2. a) scrie $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$ ...1p
calculează $(-2017) \circ (-2016) \circ ... \circ 0 \circ 1 \circ ... \circ 2017 = -2$ ...2p
b) demonstrează bijectivitatea funcției f ...2p
arată că $f(x+y) = f(x)^{\circ} f(y)$ ...2p

3. scrie $2xy + 1 - (x+y) = xy + (x-1)(y-1)$ ...2p
arată că $xy + (x-1)(y-1) > 0,\ (\forall) x, y \in H$ ...1p
demonstrază că $\frac{xy}{2xy+1-(x+y)} > 0$ ...1p
arată că $\frac{xy}{2xy+1-(x+y)} - 1 = \frac{-xy-1+x+y}{2xy+1-(x+y)} = \frac{(1-x)(y-1)}{2xy+1-(x+y)}$ ...2p
demonstrează că $(1-x)(y-1) < 0$ și deduce $\frac{xy}{2xy+1-(x+y)} < 1$ ...1p

4. a) folosește corect formula de integrare prin părți ...1p
calculează și obține $I = x \cdot ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C$ ...2p
b) arată că $I = \int cox^2 x \cdot sinxdx - \int cox^4 x \cdot sinxdx$ ...2p
calculează să obțină $I = -\frac{cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + C$ ...2p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracțiuni de punct.
Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.