CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ȘTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a IX-a

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x și $\{x\}$ este partea fracționară a lui x.

2. Fie triunghiul dreptunghic ABC, $m(\measuredangle A) = 90°$. Se construiește perpendiculara în C pe cateta $[AC]$ pe care se consideră un punct C' astfel încât $[CC'] \equiv [AC]$, iar pe perpendiculara în B pe cateta $[AB]$ se consideră punctul B', $[BB'] \equiv [AB]$. Să se arate că dreptele BC', CB' și înălțimea AA' a ΔABC sunt concurente.

3. Fie șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$. Dacă $3(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = n \cdot x_{n+1}$, $(\forall) n \geq 1$ și $x_n = ny_n$, arătați că $(y_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

4. Un disc e împărțit în 6 părți egale prin 3 diametre. În fiecare dintre sectoarele formate se află câte un pion. La o mutare alegem doi pioni, pe care îi deplasăm în sectoare vecine celor din care pleacă. Există un șir finit de mutări în urma cărora toți pionii să ajungă într-un același sector? Justificați răspunsul.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a X-a

1. a) Determinați numărul: $N = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.
b) Demonstrați că: $(log_a b + log_b a + 2)(log_a b - log_{ab} b) \cdot log_b a - 1 = log_a b$.

2. a) Determinați parametrul real *m* pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & x \leq 3 \\ mx + 1, & x > 3 \end{cases}$ este inversabilă.
b) Rezolvați ecuația: $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$.

3. a) Se dau numerele complexe $z_1 = a + ib$ și $z_2 = b + ia$, de modul 1. Să se demonstreze că $z_2 = \frac{i}{z_1}$.
b) Un elev trebuie să înmulțească 2017 numere complexe de modul 1. Din greșeală, el schimbă între ele partea reală cu coeficientul părții imaginare, la fiecare factor al produsului și astfel obține ca rezultat final numărul $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Care trebuia să fie rezultatul corect al produsului celor 2017 numere complexe?

4. Se dau numerele reale $a, b, c > 0$.
a) Demonstrați că dacă $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+ab} = \frac{1}{2}$, atunci $a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1 = 0$.
b) Descompuneți în factori expresia $E(a, b) = a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1$.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} - \frac{1}{1+6^x} = \frac{1}{2}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Determinați constantele reale *a, b, c,* pentru care:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}-ax^2-bx-c\right)=0$

2. a) Fie ω o rădăcină a ecuației $x^2-x+1=0$. Calculați ω^3;
b) Calculați următoarea sumă de matrice: $\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} k(3k+1) & \frac{k}{(k+1)!} \\ 2^k & k\cdot(\omega^3-1)\end{pmatrix}$

3. Calculați limitele:
a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-5^x}{x}$;
b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\left(x^2+6x-6\right)}{x-1}$;
c) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right]+\left[\frac{2}{x^2}\right]+\left[\frac{3}{x^2}\right]\right)$.

4. Calculați determinantul următor, scriind rezultatul sub formă de produs:
$D=\begin{vmatrix} sin^2x & cos^2x & sin2x \\ cos^2x & sin^2x & sin2x \\ 1+sin2x & -1 & 1\end{vmatrix}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XII-a

1. Calculați $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + tgx)dx$.

2. a) Fie $g, G: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{15x\sqrt{x+1}}{2}$ și $G(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot \sqrt{x+1}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât G să fie primitivă a funcției g ;
b) Calculați $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)(e^x+1)} dx$.

3. Fie $(A, +, \cdot)$ și $(B, +, \cdot)$ două inele în raport cu adunarea și cu înmulțirea, unde $A = \{x + y\sqrt{3} | x, y \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{Z}\right\}$. Arătați că cele două inele sunt izomorfe.

4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Se cere:
a) Calculați $\underbrace{x * x * ... * x}_{n\ ori}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
b) Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a * b = 6$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
BAREM - clasa a IX-a

1. Obs. că $\{x\}+\frac{1}{\{x\}}>0$ $(\{x\}\in[0,1))\Longrightarrow[x]>0$ …1p

Scrie ecuația sub forma $([x]-\{x\})\left(1-\frac{1}{[x]\cdot\{x\}}\right)=0$ …1p

$\Longrightarrow[x]=\{x\}\Longrightarrow x=0$ fals pt. că $x\neq 0$ …2p

Sau $[x]\cdot\{x\}=1$, unde not. $[x]=k\in\mathbb{N}^*\Longrightarrow\{x\}=\frac{1}{k}$ …2p

Finalizare: $x=k+\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}^*$ …1p

2. Not. $AB\cap CB'=\{D\}$ și $AC\cap BC'=\{E\}$

Dem. că $\frac{EA}{EC}\cdot\frac{BD}{DA}\cdot\frac{A'C}{A'B}=1$ ...1p

Din $\Delta AEB\sim\Delta CEC'$ $\Longrightarrow$ $\frac{EA}{EC}=\frac{AB}{CC'}=\frac{AB}{AC}$ ...1p

Din $\Delta ACD\sim\Delta BB'D$ $\Longrightarrow$ $\frac{BD}{DA}=\frac{BB'}{AC}=\frac{AB}{AC}$ ...1p

Aplică t. catetei în $\Delta ABC\Longrightarrow\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB^2}{AC^2}$ ...2p

Finalizare ...2p

3. Inducție

arată că $x_2=3x_1=\frac{2\cdot3}{2}x_1$ ...1p

presupune $x_n=\frac{n(n+1)}{2}x_1$ ...1p

demonstrează $x_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}x_1$ ...3p

determină $y_n=\frac{n+1}{2}$ ...1p

demonstrează că $(y_n)_{n\geq1}$ este progresie aritmetică ...1p

4. Colorăm 3 sectoare cu o culoare și 3 cu altă culoare. La o mutare doi pioni își schimbă culoarea. ...2p

În urma unei mutări rămâne un număr impar de pioni pe o culoare și un număr impar de pioni pe cealaltă culoare. ...4p

Finalizare: nu e posibil să aducem toți cei 6 pioni pe aceeași culoare ...1p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.
Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ȘTIINȚE ALE NATURII
BAREM - clasa a X-a

1. a) ajunge la $N = \left|3 + 2\sqrt{2}\right| - \left|2 + \sqrt{2}\right| - \left|\sqrt{2} - 1\right|$ ...2p
finalizare $N = 2$ ...1p
b) scrie toți logaritmii în baza a ...1p
notează $log_a b = x$
obține $\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)\left(x - \frac{x}{1+x}\right) \cdot \frac{1}{x} - 1 = x$ ...1p
calcule, finalizare ...2p

2. a) determină vârful parabolei de la prima ramură $V(3, -9)$ ...1p
determină imaginile celor două ramuri ale funcției
$[-9, \infty)$, respectiv $(-\infty,\ 3m + 1)$ ...1p
pune condiția de bijectivitate, găsește $m = -\frac{10}{3}$ și finalizează ...1p
b) condiție $x \geq 1$ și notație $\sqrt[3]{2 - x} = a,\ \sqrt{x - 1} = b$ ...1p
obține relația $a^3 + b^2 = 1$ ...1p
rezolvă sistemul și determină $a \in \{0, 1\}$ ...1p
finalizare $S = \{1, 2\}$ ...1p

3. a) $z_1 \cdot z_2 = (a^2 + b^2) \cdot i = i \implies z_2 = \frac{i}{z_1}$ ...2p
b) fie $z_1, z_2, \ldots, z_{2017}$ cele 2017 numere complexe de modul 1
not. $P = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{2017}$ ...1p
schimbând partea reală cu coeficientul părții imaginare, conform pct. a)
se obține $P^* = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{z_{2017}} = \frac{i^{2017}}{P} = \frac{i}{P}$ ...2p
egalează $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{i}{P} \implies P = \frac{i}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ...1p
obține rezultatul corect $P = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ...1p

4. a) dem. prin calcul ...2p
b) obține $E(a, b) = (a - 1)(b - 1)(ab - 1)$ ...2p
c) notează $2^x = a,\ 3^x = b,\ 6^x = ab$ ...1p
folosește a) și b) și obține soluția unică $x = 0$ ...2p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracțiuni de punct.
Orice soluție corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
BAREM - clasa a XI-a

1. Stabilește că $a > 0$ ...1p

Amplifică cu conjugata și scrie limita ...2p

Ajunge la relațiile: $a^2 = 5,\ 7 - 2ab = 0,\quad -8 - b^2 - 2ac = 0$ ...3p

Determină $a = \sqrt{5},\quad b = \frac{7}{2\sqrt{5}}\ ,\quad c = -\frac{449}{100\sqrt{5}}$ ...1p

2. a) $\omega^3 = -1$ ...2p

b) scrie $\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} k(3k+1) & \frac{k}{(k+1)!} \\ 2^k & k\cdot(\omega^3-1)\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k & \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} \\ \sum_{k=1}^{n}2^k & (-2)\sum_{k=1}^{n}k\end{pmatrix}$ ...2p

calculează sumele și finalizează ...3p

3. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-5^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x} = ln\frac{3}{5}$ ...2p

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln(x^2+6x-6)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln[(x-1)(x+7)+1]}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln[(x-1)(x+7)+1]}{(x-1)(x+5)}(x+7) = 8$

...2p

c) scrie $\frac{1}{x^2} - 1 < \left[\frac{1}{x^2}\right] \le \frac{1}{x^2}\ \ |\cdot x^2$ și trece la limită $\Longrightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\left[\frac{1}{x^2}\right] = 1$ ...2p

obține analog $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\left[\frac{2}{x^2}\right] = 2$ și $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\left[\frac{3}{x^2}\right] = 3$ și finalizează ...1p

4. adună c_2 la c_1 și obține $D = \begin{vmatrix} 1 & cos^2x & sin2x \\ 1 & sin^2x & sin2x \\ sin2x & -1 & 1\end{vmatrix}$ ...2p

scade linia 1 la linia 2 și obține

$D = \begin{vmatrix} 1 & cos^2x & sin2x \\ 0 & sin^2x-cos^2x & 0 \\ sin2x & -1 & 1\end{vmatrix}$ ...3p

Finalizare $D = -cos^3 2x$ ...2p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.
Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
BAREM - clasa a XII-a

1. Notează $\frac{\pi}{4} - x = t$ ...2p

Ajunge la $I_t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln\frac{2}{1+tgt}dt$ ...3p

Obține $I = \frac{\pi}{8} ln2$ ...2p

2. a) scrie $G^{\backprime}(x) = g(x)$ ...1p

determină $a = 3,\ b = 1,\ c = -2$ ...2p

b) $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)(e^x+1)}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x^2+1)(e^x+1)} + \frac{1}{(x^2+1)(e^{-x}+1)}\right)dx$ ...2p

ajunge la $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ ...1p

finalizare $I = \frac{\pi}{4}$ ...1p

3. consideră funcția $f: A \to B,\ f\left(x + y\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$ ...2p

demonstrează $f(a+b) = f(a) + f(b),\ (\forall)a, b \in A$ ...1p

demonstrează $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b),\ (\forall)a, b \in A$ ...2p

demonstrează bijectivitatea ...2p

4. a) scrie $x * x = (x-5)^2 + 5$ ...1p

presupune $P(k)$ adevărată ...1p

demonstrează $P(k+1)$ și finalizează ...2p

b) scrie $a * b = (a-5)(b-5) + 5$ ...1p

determină a și b. ...2p

Notă:
Nu se acordă punct din oficiu sau fracțiuni de punct.
Orice soluție corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.