MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Se consideră x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + (1-a)\cdot x - a = 0$, iar x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + (a-3)\cdot x - 3a = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine rădăcinile x_1, x_2.

b) Să se determine valorile lui a pentru care ecuaţiile date au o rădăcină comună.

c) Să se demonstreze că $x_1^{2017} + x_2^{2017} + x_3^{2017} + x_4^{2017}$ este un număr natural par, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Obţine $x_1 = a, x_2 = -1$, sau invers.....**2 p**

b) Obţine $x_3 = -a, x_4 = 3$, sau invers.....**1 p**

Ecuaţiile au o rădăcină comună dacă $x_1 = x_4$ sau $x_2 = x_3$ sau $x_1 = x_3$.....**1 p**

Finalizare $a \in \{0,1,3\}$.....**1 p**

c) Obţine $x_1^{2017} + x_2^{2017} + x_3^{2017} + x_4^{2017} = 3^{2017} - 1$.....**1 p**

Finalizare $x_1^{2017} + x_2^{2017} + x_3^{2017} + x_4^{2017} = 3^{2017} - 1$, care este număr natural par.....**1 p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC în care măsurile unghiurilor aparţin intervalului $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Determinaţi perimetrul triunghiului ABC, $m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$, ştiind că aria triunghiului este egală cu 24 cm^2 şi lungimile laturilor sunt numere în progresie aritmetică.

b) Să se demonstreze că $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Fie $c_1 \le c_2 < ip$ lungimile laturilor triunghiului dreptunghic.

Atunci $c_1 \cdot c_2 = 48$ şi $c_1 + ip = 2c_2$.....**1 p**

Din $ip^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow (2c_2 - 1)^2 = c_1^2 + c_2^2$, obţinem că $3c_2 = 4c_1$.....**1 p**

Obţine $c_1 = 6, c_2 = 8, ip = 10$ şi $P_{ABC} = 24$ cm.....**1 p**

b) Demonstrăm $\Leftarrow$

Dacă $m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $\sin^2 B + \sin^2 C = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$,.....**2 p**

Demonstrăm $\Rightarrow$

Folosind formula $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$, relaţia $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$ devine

$\frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 2B + \cos 2C = 0$.....**1 p**

Din $2\cos(B+C)\cos(B-C) = 0, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se obţine $B + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$.....**1 p**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se numeşte $n - special$, un număr de forma $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, unde cifrele $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2, 3\}$ şi pentru orice cifră a_k, cel puţin una dintre perechile (a_{k-1}, a_k) sau (a_k, a_{k+1}) să fie formată din numere consecutive. De exemplu: 121 este număr $3 - special$; 3221 este număr $4 - special$, dar 122 nu este număr $3 - special$.

a) Justificaţi câte numere $3 - speciale$ există?

b) Determinaţi toate numerele $4 - speciale$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Într-un număr $3 - special$ nu putem avea două cifre consecutive identice (scris explicit sau folosit impicit în numărare)…….....**1 p**

Obţine următoarele numere $3 - speciale$ $121, 123, 212, 232, 321, 323$…….....**2 p**

b) Vom obţine numere $4 - speciale$ atât din numere $3 - speciale$, cât şi din numere care nu sunt $3 - speciale$.

Din numerele $3 - speciale$ se obţin următoarele: $1212, 1232, 2121, 2123, 2132, 2312, 2321, 2323, 3212, 3232,$ …….....…..**2 p**

Mai putem obţine următoarele numere $4 - speciale$: $1221, 1223, 2112, 2332, 3221, 3223$……....**2 p**

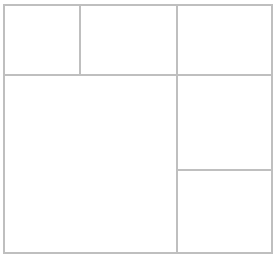
Problema 4.

a) Justificaţi cum poate fi împarţită complet o foaie pătratică de tablă având lungimea laturii egală cu l, în n suprafeţe pătratice (nu toate având aceeaşi lungime a laturii) , unde $n \in \{6,7\}$.

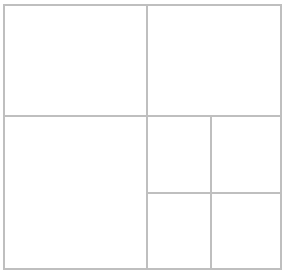
b) Ştiind că o suprafaţă pătratică de tablă având lungimea laturii egală cu $l \in \mathbb{N}$ a fost împarţită complet în 13 suprafeţe pătratice, dintre care 12 au lungimea laturii egală cu 1 şi cealaltă are lungimea laturii egală cu $x \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, să se determine l**.**

BAREM DE CORECTURĂ

a)



Pentru $n = 6$



Pentru $n = 7$

.....**4 p**

b) Folosind ariile, se obţine $l^2 = 12 + x^2$…….....…**1 p**

Obţine $(l - x)(l + x) = 12$……..…….....**1 p**

Finalizare $l = 4$…….....**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. În sistemul de axe ortogonale (xOy) se consideră punctele $A(-2,3), B(4,6)$ şi dreapta $d: x+y=6$.

a) Determinaţi coordonatele unui punct $C \in d$, astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel, cu baza AB.

b) Determinaţi un punct $D \in d$, având coordonatele numere naturale, astfel încât aria triunghiului ABD să fie un număr natural minim.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Dacă $C \in d \Rightarrow C(a, 6-a)$ ..... **1 p**

Din $CA = CB$, rezultă că $\sqrt{(a+2)^2+(3-a)^2} = \sqrt{(a-4)^2+(-a)^2}$ și $a = \frac{1}{2}$, deci $C\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$ ..... **1 p**

b) La fel $D(a, 6-a), a \in \mathbb{R}$ ..... **1 p**

Obține ecuația $AB: x-2y+8=0$ și lungimea $AB = 3\sqrt{5}$ ..... **1 p**

Dacă $DE \perp AB$, atunci $DE = \frac{|a-2(6-a)+8|}{\sqrt{5}} = \frac{|3a-4|}{\sqrt{5}}$ ..... **1 p**

Aria triunghiului va fi $A_{ABD} = \frac{3|3a-4|}{2}$ ..... **1 p**

Aria va fi număr natural minim dacă $|3a-4| = 2$, deci $a = 2$, iar $D(2,4)$ ..... **1 p**

Problema 2. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4^x - m \cdot 2^x + 1, m \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $m = 2{,}5$, rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât soluţia inecuaţiei $f(x) \leq 0$ să fie un interval mărginit de lungime 1.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Notăm $2^x = y$ și obținem $2y^2 - 5y + 2 = 0$ ..... **1 p**

Obținem că $y \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, deci $x \in \{-1, 1\}$ ..... **1 p**

b) Dacă $2^x = y$, inecuația devine $y^2 - my + 1 \leq 0$ ..... **1 p**

Se impune condiția $\Delta = m^2 - 4 > 0$ ..... **1 p**

Dacă y_1, y_2 sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$, atunci din $|y_1 - y_2| = 1$ se obține $(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2 = 1$ ..... **2 p**

Obținem $m \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ ..... **1 p**

Problema 3.

a) Arătaţi că $\log_2\left(1+\sqrt{3}\right) \in (1,2)$.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $2^x - 2^{1-x} \leq 2$.

c) Arătaţi că există un singur număr natural care să fie soluţie a ecuaţiei $2 - x^2 = 2^x - 2^{1-x}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $1 < \log_2\left(1+\sqrt{3}\right) < 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 3$.....**1 p**

b) Dacă $2^x = y > 0$, rezultă că $y^2 - 2y - 2 \leq 0$ .....**1 p**

Găsim $y \in \left[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right]$ și $x \in \left(-\infty, \log_2\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$ .....**1 p**

c) Observăm că $2 - x^2 \leq 2, (\forall)x \in \mathbb{R}$ .....**1 p**

Deducem că $2^x - 2^{1-x} \leq 2$ si $x \in \left(-\infty, \log_2\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$.....**1 p**

Dacă $x \in \mathbb{N}$, conform punctului **a)** , deducem că $x \in \{0,1\}$.....**1 p**

Prin verificare, deducem că $x = 1$ este singura soluție.....**1 p**

Problema 4. Preţul unui obiect creşte cu 60%, iar noul preţ creşte cu $p\%$, unde $p \in \mathbb{N}, p \leq 25$. Ultimul preţ se micşorează cu $q\%$, $q \in \mathbb{N}$, astfel încât preţul final să devină egal cu preţul iniţial al obiectului.

a) Arătaţi că $q = 100 - \frac{6250}{p+100}$.

b) Determinaţi valorile p şi q.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Dacă S este pretul inițial, atunci după mărirea precizată, prețul va fi $\frac{8S}{5}$.....**1 p**

După mărirea cu $p\%$, prețul va fi $\frac{8S}{5} + \frac{p}{100} \cdot \frac{8S}{5} = \frac{2(p+100)S}{125}$.....**1 p**

După reducerea cu $q\%$, prețul va fi $\frac{2(p+100)S}{125} - \frac{q}{100} \cdot \frac{2(p+100)S}{125} = \frac{(p+100)(100-q)}{6250}S$.....**1 p**

Impunem condiția de egalitate obținând $\frac{(p+100)(100-q)}{6250}S = S$.....**1 p**

Deducem că $q = 100 - \frac{6250}{p+100}$.....**1 p**

b) Din $q \in \mathbb{N}$, rezultă că $(p+100)|6250$ și cum $100 < p + 100 \leq 125$.....**1 p**

Se obține $p = 25$ și $q = 50$.....**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Notăm cu $\Delta(a,b,c)$ determinatul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\Delta(0,1,-1)$.

b) Determinați numerele reale x, pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

c) Demonstrați că, dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $\Delta(a,b,c)=0$, atunci, triunghiul este isoscel.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\Delta(0,1,-1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=12$ ..... **1 p**

b) $A(0,1,x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2x\\ 0 & 3 & 3x^2\end{pmatrix}$

$\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \text{rang(A)}\geq 2$ ..... **1 p**

Pentru ca $\text{rang}(A)=2$ este necesar ca $\Delta(0,1,x)=0$ ..... **1 p**

$\Delta(0,1,x)=\begin{vmatrix}2 & 2x\\ 3 & 3x^2\end{vmatrix}=6x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\end{cases}$ ..... **1 p**

c) $\Delta(a,b,c)=6\cdot\left|\begin{array}{c|cc}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{array}\right|\overset{\substack{(C_2-C_1)\to C_2\\ (C_3-C_1)\to C_3}}{=\!=}6\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=$

$=6\cdot(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a+b & a+c\end{vmatrix}=6(b-a)(c-a)(c-b)=0$ ..... **2 p**

Rezultă că $a=b$ sau $a=c$ sau $b=c$. Așadar, triunghiul este isoscel ..... **1 p**

Problema 2. Fie a,b,c numere reale strict pozitive și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a\cdot x+\sqrt{b\cdot x^2+cx+1}$.

a) Determinați a,b,c, știind că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{4}$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+\sqrt{4\cdot x^2+x+1}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\sqrt{b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=a+\sqrt{b}$ ..... **1 p**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{bx^2-cx+1}-ax\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(b^2-a^2)x^2-cx+1}{\sqrt{bx^2-cx+1}+ax}$ ..... **1 p**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} b-a^2=0 \\ \frac{-c}{a+\sqrt{b}} = -\frac{1}{4} \end{cases}$ ..... **1 p**

Din $\begin{cases} a+\sqrt{b}=4 \\ b-a^2=0 \\ \frac{-c}{a+\sqrt{b}} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases}$ ..... **0,5 p**

b) $f(x) = 2x+\sqrt{4\cdot x^2+x+1}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și ca urmare, nu are asimptote verticale..... **0,5 p**

$m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 4, n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-4x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x} = \frac{1}{4}$ ..... **1 p**

Așadar, dreapta de ecuație: $y = 4x+\frac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ ..... **1 p**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x} = -\frac{1}{4}$.

Așadar, dreapta de ecuație: $y = -\frac{1}{4}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ ..... **1 p**

Problema 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+1}, a,b\in\mathbb{R}, a\neq b$.

a) Să se determine a și b știind că $f(-1)=2$ și tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă $x=1$ este paralelă cu axa (Ox).

b) Pentru funcția determinată la **a)** să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x=3$.

c) Să se demonstreze că funcția determinată la **a)** este mărginită.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f(-1)=2 \Rightarrow -a+b=3$ ..... **1 p**

$f'(x) = \frac{-ax^2+2(1-b)x+a}{(x^2+1)^2}$ ..... **1 p**

$f'(1)=0 \Leftrightarrow b=1,$ și obținem $a=-2$, deci $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$, x$\in\mathbb{R}$ ..... **2 p**

b) $A(3,\frac{2}{5}), f'(3) = \frac{4}{25}$, ecuația tangentei este $y-\frac{2}{5} = \frac{4}{25}(x-3) \Leftrightarrow 4x-25y-2=0$ ..... **1 p**

c) $f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + +		0	- - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$	1	↗	2	↘	0	↗	1

Tabelul de variație al funcției ..... **1 p**

Din tabel, rezultă că $0\le f(x)\le 2, \forall x\in\mathbb{R}$. ..... **1 p**

Problema 4. Se consideră matricea $A\in M_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

a) Pentru ce valori complexe ale lui m matricea A este inversabilă?

b) Pentru $m=2$, să se determine inversa matricei A.

c) Să se demonstreze că, dacă $m=0$, atunci $A^k \neq O_3$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\det(A) = -m^3 - m + 2$..... **1 p**

Matricea A este inversabilă dacă $\det(A) \neq 0$.

$\det(A) = 0 \Rightarrow m^3 + m - 2 \Rightarrow (m-1)(m^2+m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$.....**1 p**

A este inversabilă dacă $m \notin \{m_1, m_2, m_3\}$.....**1 p**

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -8 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.....**1 p**

$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.....**1 p**

c) Pentru $m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, care este inversabilă, întrucât $\det(A) = 2$.....**1 p**

Presupunând, prin reducere la absurd, că $A^k = O_3$, din $\det(A^k) = (\det(A))^k$, ar rezulta că $\det(A) = 0$(fals).....**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Pe mulțimea numerelor reale, se definește legea de compoziție „$\circ$” astfel:

$x \circ y = 4(x+1)(y+1) - 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că legea de compoziție este asociativă și determinați elementul neutru.

b) Calculați $-\frac{2017}{1008} \circ \left(-\frac{2016}{1008}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{1008}\right)$.

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$\circ$”.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Demonstrează asociativitatea ……**1 p**

Elementul neutru $e = -\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$ ……**1 p**

b) Avem $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ ……**1 p**

În compunere există $-\frac{1008}{1008} = -1$, deci compunerea celor 2017 elemente este -1……**1 p**

c) Se găsește $x' = -\frac{16x+15}{16(x+1)}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ……**2 p**

Din $x' = x \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{4};\ x_2 = -\frac{3}{4}$ ……**1 p**

Problema 2. Se consideră polinomul $f = mX^5 + nX + p,\ \ m, n, p \in \mathbb{Z}$.

a) Să se demonstreze că $f(3) - f(-1)$ este multiplu de 4.

b) Să se demonstreze că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $a - b$.

c) Să se determine coeficienții polinomului f știind că $f(-1) = 4$ și $f(n) = 5$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f(3) - f(-1) = 4(61m + n) \vdots 4$ ……**1 p**

b) $f(a) - f(b) = (a-b)[m(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + n] \Rightarrow f(a) - f(b) \vdots (a-b)$ ……**2 p**

c) $f(n) - f(-1) = 1$și $(n+1) | \big(f(n) - f(-1)\big) \Rightarrow (n+1) | 1 \Rightarrow n \in \{0, -2\}$ ……**2 p**

Dacă $n = 0 \Rightarrow f = mX^5 + p, f(-1) = 4, f(0) = 5 \Rightarrow -m + p = 4, p = 5 \Rightarrow m = 1 \in \mathbb{Z}$.

Deci $f = X^5 + 5$ ……**1 p**

Dacă $n=-2 \Rightarrow f=mX^5-2X+p$

$f(-1)=4 \Leftrightarrow -m+p=2$, $\quad f(-2)=5 \Leftrightarrow -32m+p=1$

Obținem sistemul

$\begin{cases}-m+p=2\\-32m+p=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=1+32m\\m+1+32m=2\end{cases} \Rightarrow 31m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{31} \notin \mathbb{Z}$, așadar, în acest caz, nu există polinomul f care să satisfacă condițiile date……**1 p**

Problema 3. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(e^{x^2})dx$.

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei (Ox).

c) Să se demonstreze că $\int_1^e xf(x)dx+\int_0^1 e^{x^2}dx=e$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\int_0^1 f(e^{x^2})dx=\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}dx=$ ……**1 p**

$=-\frac{1}{2}\int_0^1 (e^{-x^2})'dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2e}$ ……**1 p**

b) $V=\pi\int_1^e f^2(x)dx=\pi\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

$\ln x=t \Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt, x=e^t \Rightarrow V=\pi\int_0^1 te^{-t}dt$ ……**1 p**

Finalizare $V=\pi\left(1-\frac{2}{e}\right)$ ……**1 p**

c) Schimbăm variabila prin $\sqrt{\ln x}=t \Rightarrow x=e^{t^2}, dx=2te^{t^2}dt$……**1 p**

$\int_1^e xf(x)dx=\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx=\int_0^1 2t^2e^{t^2}dt$ ……**1 p**

Integrala va fi $\int_0^1 t\left(e^{t^2}\right)'dt=e-\int_0^1 e^{t^2}dt=e-\int_0^1 e^{x^2}dx$

Finalizare ……**1 p**

Problema 4. Pe mulțimea numerelor reale, definim legea de compoziție „$*$” prin $x*y=\sqrt[3]{x\cdot y}, (\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că legea „$*$” nu este asociativă.

b) Fie $H=\{-1,0,1\}$. Demonstrați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$” și că operația indusă de legea „$*$” pe H este asociativă.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Este suficient un contraexemplu.

$(1*2)*3=\sqrt[3]{2}*3=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27}}=\sqrt[9]{54}$

$1*(2*3)=1*\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[9]{6} \Rightarrow$ legea „$*$” nu este asociativă……**2 p**

b) Tabla legii de compoziție, relativ la mulțimea H(legea notată prin „$\circ$”) este:

0	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Așadar, H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”……**2 p**

Observăm că $(\forall)x\in H$, avem $\sqrt[3]{x}=x$……**1 p**

Fie $(\forall)a,b,c\in H$. Avem $\begin{cases}a\circ(b\circ c)=a\circ\sqrt[3]{bc}=a\circ(bc)=\sqrt[3]{abc}=\underline{abc}\\(a\circ b)\circ c=\sqrt[3]{ab}\circ c=(ab)\circ c=\sqrt[3]{abc}=\underline{abc}\end{cases}$……**2 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*