MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Problema 1. Un număr natural nenul n se numeşte *triunghiular* dacă există $k \in \mathbb{N}^*$astfel încât

$$n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k.$$

Determinaţi toate perechile de numere triunghiulare (m, n) cu proprietatea că $m - n = 2017$.

BAREM DE CORECTURĂ.

Dacă m, n sunt numere *triunghiulare*, atunci există numerele $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m = \frac{p(p+1)}{2}$ şi $n = \frac{q(q+1)}{2}$.....**2 p**

Avem: $\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} = 2017 \Leftrightarrow (p-q)(p+q+1) = 2 \cdot 2017$.....**2 p**

Obţinem că $(p-q, p+q+1) \in \{(1,4034); (2,2017)\}$, de unde $(p, q) \in \{(2017, 2016), (1009, 1007)\}$.....**2 p**

Perechile căutate sunt $(m, n) \in \{(2035153, 2033136), (509545, 507528)\}$.....**1 p**

Problema 2. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + b$, unde a şi b sunt numere întregi. Ştiind că $f(0)$ şi $f(1)$ sunt numere impare, demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ nu are soluţii întregi.

BAREM DE CORECTURĂ.

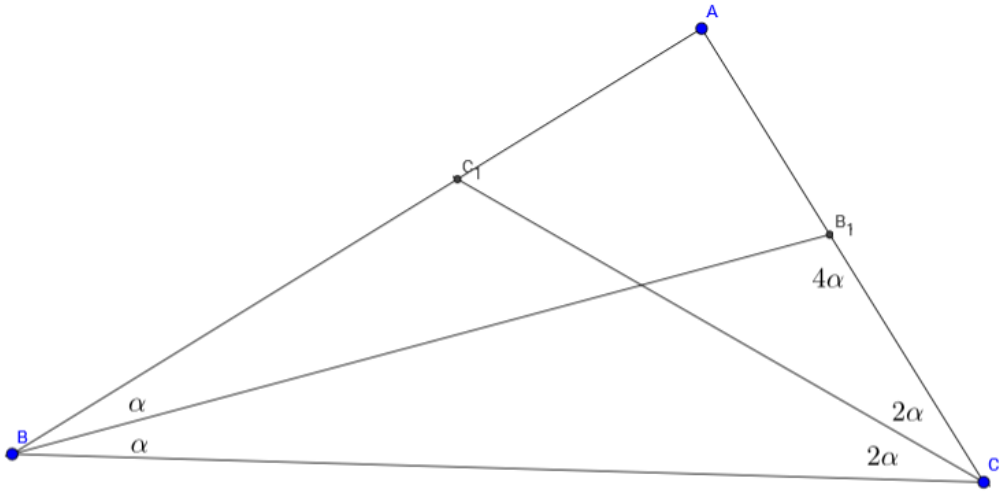
Cum $f(0)$ şi $f(1)$ sunt numere impare, rezultă că a şi b sunt numere impare. .....**3 p**

Presupunem prin reducere la absurd că ecuaţia $f(x) = 0$ ar avea măcar o soluţie întreagă, fie aceasta α; atunci $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$. ..... **1 p**

Deoarece a este impar, numerele α şi $\alpha + a$ au parităţi diferite, prin urmare $\alpha^2 + \alpha a$ este număr par. Deducem că $\alpha^2 + a\alpha + b$ este număr impar, deci nenul. Presupunerea făcută este, aşadar, falsă, de unde concluzia problemei. .....**3 p**

Problema 3. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele interioare BB_1 și CC_1. Știind că $BB_1 = BC$ și $CC_1 = BC_1$, să se determine unghiurile triunghiului.

BAREM DE CORECTURĂ.



Notăm $m(\widehat{B_1BC}) = \alpha$. Rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$.....**1 p**

$CC_1 = BC_1 \Rightarrow \Delta CC_1B$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{C_1CB}) = 2\alpha$.....**2 p**

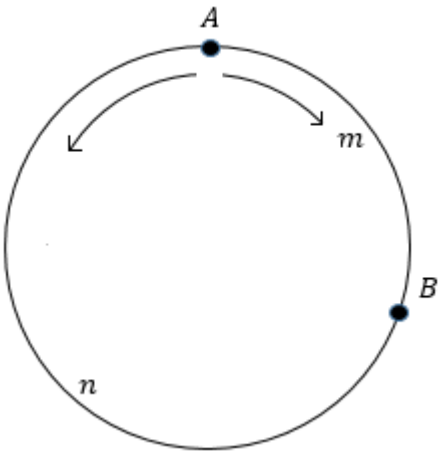
$BB_1 = BC \Rightarrow \Delta BC_1C$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{BB_1C}) = m(\widehat{BCB_1}) = 4\alpha$.....**2 p**

Cum $m(\widehat{B_1BC}) + m(\widehat{BCB_1}) + m(\widehat{BB_1C}) = 180° \Rightarrow \alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$.....**1 p**

Așadar, unghiurile triunghiului ABC sunt $m(\widehat{ABC}) = 40°, m(\widehat{BCA}) = 80°, m(\widehat{BAC}) = 60°$.....**1 p**

Problema 4. Două muște se mișcă uniform pe circumferința unui cerc. Ele pleacă simultan dintr-un punct A de pe circumferință în sensuri contrare. După ce se întâlnesc prima dată într-un punct B de pe circumferință, primei muște i-au mai trebuit 4 secunde ca să ajungă în punctul A, iar celei de-a doua, continuând mersul său, i-au mai trebuit 9 secunde ca să ajungă în punctul A. De câte ori, într-un minut, parcurg circumferința fiecare dintre cele două muște?

BAREM DE CORECTURĂ.



Fie l lungimea circumferinței cercului.

Notăm cu x lungimea arcului $\widehat{AnB}$. Rezultă că lungimea arcului $\widehat{AnB}$ este $(l - x)$.....**1 p**

Fie t timpul necesar parcurgerii distanțelor de la A la B, prima dată, același pentru cele două muște.

Dacă v_1 este viteza primei muște și v_2 viteza celei de-a doua muște avem:

$x = t \cdot v_1 = 9v_2$ și $l - x = t \cdot v_2 = 4v_1$.....**2 p**

Obținem $\frac{x}{l-x} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{9v_2}{4v_1} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$.....**1 p**

Rezultă: $\frac{x}{l-x} = \frac{3}{2}$ și, de aici $x = \frac{3l}{5}$, iar $l - x = \frac{2l}{5}$.....**1 p**

Prima muscă parcurge $\frac{2}{5}l$ în 4 secunde, deci parcurge l în 10 secunde. Așadar, parcurge circumferința de 6 ori într-un minut.....**1 p**

A doua muscă parcurge $\frac{3}{5}l$ în 9 secunde, deci parcurge l în 15 secunde.

Așadar, parcurge circumferința de 4 ori într-un minut.....**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

a) Demonstrați că funcția f este impară și injectivă.

b) Demonstrați că funcția f este inversabilă și determinați inversa acesteia.

c) Rezolvați ecuația $e^x-e^{-x}=2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) f impară……**1 p**

f injectivă ……**1 p**

b) f surjectivă, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$……**2 p**

c) Ecuația este echivalentă cu $f(x)=f^{-1}(x), x\in\mathbb{R}$. Funcția și inversa au graficele simetrice față de prima bisectoare, intersecția lor va fi pe această dreapta, $x=0$ este o soluție…….....**2 p**

Pentru $x>0$, graficul funcției f este deasupra primei bisectoare, ecuația nu are soluții, iar f este impară, deci nu are nici soluții negative……**1 p**

Problema 2. În mulțimea numerelor complexe, să se rezolve ecuația:
$z^3-\left(2\sqrt{3}+3i\right)\cdot z^2+\left(1+4\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot z-3i-6\sqrt{3}=0$, știind că admite rădăcini de forma $b\cdot i, b\in\mathbb{R}$ și $z_1+z_2+z_3=2\sqrt{3}+3i$.

BAREM DE CORECTURĂ

Fie $z=b\cdot i$, o rădăcină a ecuației.

Avem: $-b^3\cdot i+\left(2\sqrt{3}+3i\right)\cdot b^2+\left(1+4\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot bi-3i-6\sqrt{3}=0$……**1 p**

Rezultă: $\left(2\sqrt{3}\cdot b^2-4\sqrt{3}\cdot b-6\sqrt{3}\right)+i\cdot(-b^3+3b^2+b-3)=0$.

Obținem: $\begin{cases}b^2-2b-3=0\\ b^3-3b^2-b+3=0\end{cases}$……**1 p**

Din prima ecuație, avem că $b_1=-1, b_2=3$……**1 p**

A doua ecuație se scrie:

$(b^3-b)-3(b^2-1)=0\Rightarrow b(b^2-1)-3(b^2-1)=0\Rightarrow(b^2-1)(b-3)=0\Rightarrow\begin{cases}b_1=-1\\ b_2=3\\ b_3=1\end{cases}$ ……**2 p**

Așadar, $\begin{cases}b_1=-1\\ b_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=-i\\ z_2=3i\end{cases}$……**1 p**

Din $z_1+z_2+z_3=2\sqrt{3}+3i\Rightarrow z_3=2\sqrt{3}+i$……**1 p**

Problema 3. În mulțimea numerelor reale, să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_2(\log_2(5x-4)) = 1 + \log_2(\log_2 x).$

b) $2^{\sqrt{\log_2(x+1)}} - 2 = 2 - (x+1)^{\sqrt{\log_{(x+1)} 2}}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Condiții de existență: $\begin{cases} 5x-4>0 \\ x>0 \\ \log_2(5x-4)>0 \\ \log_2 x>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,\infty)$……**1 p**

Ecuația devine: $\log_2(\log_2(5x-4)) = \log_2(2\cdot\log_2 x) \Rightarrow \log_2(5x-4) = \log_2 x^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow$
$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=4 \end{cases} \Rightarrow x=4$……**2 p**

b) Condiții de existență: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ \log_2(x+1)>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$……**1 p**

Notăm: $\log_2(x+1) = t > 0 \Rightarrow \log_{x+1} 2 = \frac{1}{t}$……**1 p**

Ecuația devine: $2^{\sqrt{t}} - 2 = 2 - (2^t)^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Rightarrow 2^{\sqrt{t}} = 2 \Rightarrow t = 1$……**1 p**

Din ecuația $\log_2(x+1) = 1 \Rightarrow x = 1$……**1 p**

Problema 4. Pe o masă sunt 5^n jetoane, $n \in \mathbb{N}^*$. Irina și Mihai joacă următorul joc: „fiecare are dreptul să ia $1, 2, 3,$ sau 4 jetoane și câștigă cel care efectuează ultima extragere”. După un timp de gândire, Irina își dă seama că poate câștiga, dacă Mihai face prima extragere.

a) Pentru $n=2$, să se explice strategia Irinei și determinați numărul de extrageri efectuat de aceasta.

b) Determinați n, știind că Irina a avut nevoie de 125 de extrageri.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $n=2 \Rightarrow$ sunt 25 de jetoane

Fiecare poate lua cel puțin 1 jeton și cel mult 4 jetoane……**1 p**

Irina va ține cont de numărul de jetoane extrase de Mihai, în așa fel încât numărul total de jetoane de la fiecare „rundă” să fie constant 5.

Dacă Mihai extrage a jetoane, Irina va extrage $5-a$ jetoane

$1 \le a \le 4$ și $1 \le 5-a \le 4$……**2 p**

	Mihai	Irina	Nr. total de jetoane
I	a_1	$5-a_1$	5
II	a_2	$5-a_2$	10
III	a_3	$5-a_3$	15
IV	a_4	$5-a_4$	20
V	a_5	$5-a_5$	**25**

$\Rightarrow$ 5 extrageri……**1 p**

b) Păstrând aceeași strategie, vor fi 125 „runde”……**1 p**

Având în vedere că la fiecare „rundă” se extrag 5 jetoane, rezultă că vor fi în total $125 \cdot 5 = 625$ jetoane, de unde conchidem că $n=4$……**2 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1. Se dă matricea $A \in M_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, care satisface egalitatea: [1] $A^2 + 3 \cdot A - 2 \cdot I_2 = O_2$.

a) Demonstrați că $A^2 - (tr\ A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2$, unde $tr\ A = x + t$ (urma matricei A).

b) Dați exemple de matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, care satisfac egalitatea [1].

c) Demonstrați că matricea A este inversabilă.

d) Demonstrați că inversa matricei A^2 este matricea $A^{-2} = \frac{3}{4} \cdot A + \frac{11}{4} \cdot I_2$.

e) Calculați $\det\left(\frac{1}{4} \cdot A^2 + A^{-2}\right)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Calcul direct……**1 p**

b) Căutăm matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu urma egală cu -3 și determinantul egal cu -2.

Exemple: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$……**2 p**

c) Din [1], rezultă că $A^2 + 3 \cdot A = 2 \cdot I_2 \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A + \frac{3}{2} \cdot I_2\right) = I_2 \Rightarrow (\exists) A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A + \frac{3}{2} \cdot I_2$……**1 p**

d) $A^2 \cdot A^{-2} = (-3 \cdot A + 2 \cdot I_2) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot A + \frac{11}{4} \cdot I_2\right) = I_2$(calcul direct)……**1 p**

e) $\det\left(\frac{1}{4} \cdot A^2 + A^{-2}\right) = \det\left(\frac{13}{4} \cdot I_2\right) = \frac{169}{16}$……**2 p**

Problema 2. Se consideră funcția $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$

a) Să se determine mulțimea maximă de existență a funcției f.

b) Să se studieze continuitatea funcției f pe această mulțime.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} \left(f(x)\right)^{\frac{2}{|x-2|}}$.

d) Să se cerceteze existența limitei $\lim\limits_{x \to 2} \left(f(x)\right)^{\frac{2}{x-2}}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $2 - |x-2| \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-2 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [0,4] \Leftrightarrow A = [0,4]$ este mulțimea maximă de existență a funcției f……**1 p**

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{4-x}}, & \text{dacă } x \in [0,2) \\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}, & \text{dacă } x \in [2,4] \end{cases}$ ……**2 p**

$\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 2} f(x) = f(2) = 1 \Leftrightarrow f$ este continuă în punctul $x_0 = 2$, deci pe mulțimea A……**1 p**

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{2-x}}=\frac{1}{e}$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\frac{4-x}{x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\frac{1}{e}$. Așadar, există $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\right)^{\frac{2}{|x-2|}}=\frac{1}{e}$……**1 p**

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(f(x)\right)^{\frac{2}{x-2}}=e$……**1 p**

Așadar, nu există $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\right)^{\frac{2}{x-2}}$……**1 p**

Problema 3. Se consideră triunghiul (ABC), determinat de următoarele drepte:

$\begin{cases}(AB)\colon x+2y-4=0\\ (BC)\colon 3x+y-2=0\\ (AC)\colon x-3y-4=0\end{cases}$

a) Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului.
b) Să se determine ecuația înălțimii din vârful A.
c) Să se calculeze aria triunghiului (ABC).

BAREM DE CORECTURĂ

a) $(AB)\cap(AC)=\{A\}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-4=0\\ x-3y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(4,0)$……**1 p**

$(AB)\cap(BC)=\{B\}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-4=0\\ 3x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow B(0,2)$……**1 p**

$(AC)\cap(BC)=\{C\}\Rightarrow\begin{cases}x-3y-4=0\\ 3x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow C(1,-1)$……**1 p**

b) Înălțimea din vârful A are panta $m=-\frac{1}{m_{BC}}$, unde $m_{BC}=-3$……**1 p**

Ecuația înălțimii din vârful A este $y=\frac{1}{3}(x-4)\Rightarrow x-3y-4=0$……**1 p**

c) $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4&0&1\\0&2&1\\1&-1&1\end{vmatrix}\right|=5$ (unități de arie)……**2 p**

Sau $m_{AC}=\frac{1}{3}$, $m_{AC}\cdot m_{BC}=-1\Rightarrow(AC)\perp(BC)$

$A_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2}=5$ (unități de arie)

Problema 4. O piesă a unui angrenaj are forma unui patrulater ale cărui vârfuri într-un reper cartezian ortogonal sunt punctele $A(2,2), B(9,1), C(14,6), D(1,5)$, iar unitatea de lungime în reper este de 1 cm.

a) Determinați coordonatele mijlocului M al diagonalei $[BD]$.
b) Demonstrați că punctele A, M, C sunt coliniare.
c) Determinați aria patrulaterului $(ABCD)$.
d) Dacă trei dintre vârfurile patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram interior plăcii, determinați aria acestui paralelogram.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Reprezintă în reperul cartezian ortogonal punctele A, B, C, D……**1 p**
Determină $M(5,3)$……**1 p**
b) Verifică coliniaritatea punctelor A, M, C……**1 p**
c) Calculează aria unui triunghi format de trei dintre vârfurile patrulaterului.
($A_{\Delta ABC}=20$ cm^2; $A_{\Delta ADC}=20$ cm^2; $A_{\Delta ADB}=10$ cm^2; $A_{\Delta CDB}=30$ cm^2)……**1 p**
Calculează aria triunghiului rămas și determină $A_{ABCD}=40$ cm^2……**1 p**
d) Determină al patrulea vârf $P(8,4)$……**1 p**
Aria acestui paralelogram este $A_{p^*}=20$ cm^2……**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1. O clepsidră are secțiunea axială din Figura 1. Ea se obține prin rotirea graficului funcției $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$ în jurul axei (Ox). Determinați volumul maxim al nisipului din clepsidră, astfel încât acesta să se poată scurge complet dintr-o parte în alta, atunci când clepsidra este întoarsă vertical.

BAREM DE CORECTURĂ

$V(C_f)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$ ..... **2 p**

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2x)}{2}dx$ ..... **3 p**

$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$ ..... **2 p**

Problema 2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5, f(x)=x^3+\hat{2}\cdot x^2+\hat{4}\cdot x+\hat{3}$.

a) Stabiliți tabla adunării, respectiv tabla înmulțirii în $\mathbb{Z}_5$.

b) Calculați $f(\hat{0}), f(\hat{1}), f(\hat{2}), f(\hat{3}), f(\hat{4})$.

c) Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $p(x)=x^3+\hat{2}\cdot x^2+\hat{4}\cdot x+\hat{3}$.

d) Demonstrați că f nu este surjectivă.

BAREM DE CORECTURĂ

a)

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Tabla adunării în $\mathbb{Z}_5$..... **1 p**

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Tabla înmulțirii în $\mathbb{Z}_5$..... **1 p**

b) $f(\hat{0})=\hat{3};\ f(\hat{1})=\hat{0};\ f(\hat{2})=\hat{2};\ f(\hat{3})=\hat{0};\ f(\hat{4})=\hat{0}$..... **1 p**

c) $p(x)=(x^3+x^2)+(x^2+x)+\hat{3}\cdot(x+\hat{1})=(x+\hat{1})\cdot(x^2+x+\hat{3})=(x+\hat{1})(x^2+\hat{6}\cdot x+\hat{8})=$
$=(x+\hat{1})(x+\hat{2})(x+\hat{4})$..... **2 p**

Sau. $p(x)=(x-\hat{3})(x-\hat{1})(x+\hat{1})$

d) $\text{Im}\, f=\{\hat{0},\hat{2},\hat{3}\}\Rightarrow f$ nu ia nici una dintre valorile $\hat{1}$ sau $\hat{4}$. Așadar, avem cel puțin un element în $x\in\mathbb{Z}_5$, astfel încât $f(x)\neq\hat{1}$ și $f(x)\neq\hat{4}$.

Rezultă că f nu este surjectivă..... **2 p**

Sau. Im f nu conține 5 elemente $\Rightarrow f$ nu este surjecție.

Problema 3. Pe mulțimea $G=(-2,2)$ definim legea de compoziție $*: G\times G\to G$, dată prin $x*y=\frac{4(x+y)}{4+xy}, (\forall)x,y\in G$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este un grup comutativ.

b) Pentru orice $t\in G$ definim funcția $f: G\to\mathbb{R}, f(t)=\int_0^t \frac{dx}{4-x^2}$. Demonstrați că f este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Demonstrează că legea $*$ este corect definită.

$(\forall), x,y\in G\Rightarrow \begin{cases} x+2>0\\ y+2>0\\ x-2<0\\ y-2<0\end{cases}; x*y\in(-2,2)\Leftrightarrow \frac{4(x+y)}{4+xy}\in(-2,2).$

Justifică inegalitățile $\begin{cases}\frac{4(x+y)}{4+xy}>-2\\ \frac{4(x+y)}{4+xy}<2\end{cases}$ ……..**1 p**

Comutativitatea este evidentă.

Asociativitatea.

$(x*y)*z=\frac{4(x+y+z)+xyz}{4+xy+xz+yz}=x*(y*z), (\forall)x,y,z\in G$……..**1 p**

Element neutru.

$x*e=\frac{4(x+e)}{4+xe}=x, (\forall)x\in(-2,2)\Rightarrow e=0.$ ……..……**0,5 p**

Element simetric.

$x*x'=0\Rightarrow x'=-x\in(-2,2)$ ……..**0,5 p**

b) $f(t)=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)$……**1 p**

$f(t_1)=f(t_2)\Rightarrow t_1=t_2$(soluție unică)$\Rightarrow f$ injectivă……..**1 p**

$f: G\to\mathbb{R}, f(t)=y\in\mathbb{R}\Rightarrow t=\frac{2\cdot e^{4y}-2}{e^{4y}+1}\in(-2,2)$……**1 p**

Demonstrează că $f(x*y)=f(x)+f(y), (\forall)x,y,\in(-2,2)$……**1 p**

Problema 4. Se dă $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx, n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Demonstrați că $I_{n+1}+3I_n=\frac{1}{n+2}, (\forall)n\in\mathbb{N}$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot I_n=\frac{1}{4}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $I_0=\int_0^1\frac{x}{x+3}dx=\int_0^1 dx-3\cdot\int_0^1\frac{dx}{x+3}=1-3\cdot\ln(x+3)\Big|_0^1=1+3\cdot\ln\left(\frac{3}{4}\right)$……..……..**1 p**

$I_1=\int_0^1\frac{x^2}{x+3}dx=\int_0^1\frac{(x^2-9)+9}{x+3}dx=\int_0^1\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx=-\frac{5}{2}+9\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)$……..**1 p**

b) $I_{n+1}+3\cdot I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+3\cdot x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$. ……..**1 p**

c) Din $0\le x\le 1\Rightarrow x^{n+2}\le x^{n+1}\Rightarrow I_{n+1}\le I_n, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Avem că $4I_{n+1}=I_{n+1}+3\cdot I_{n+1}\le I_{n+1}+3\cdot I_n=\frac{1}{n+2}\Rightarrow I_{n+1}\ge\frac{1}{4(n+2)}\Rightarrow[1]: I_n\le\frac{1}{4(n+1)}$……**2 p**

Pe de altă parte avem:

$4I_n=I_n+3\cdot I_n\ge I_{n+1}+3\cdot I_n=\frac{1}{n+2}\Rightarrow[2]: I_n\ge\frac{1}{4(n+2)}$……..**1 p**

Din [1] și [2], deducem că $\frac{n}{4(n+2)}\le n\cdot I_n\le\frac{n}{4(n+1)}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Din criteriul „cleștelui”, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot I_n=\frac{1}{4}$. ……..**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*