MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ 18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

Clasa a IX–a

Problema 1.

Se consideră funcţiile $f_m(x)=(m-1)x^2+2(m-2)x-3+m,\ m\in\mathbf{R},\ m\neq 1$.

a) Să se determine *m* astfel încât G_{f_m} să intersecteze axa (O_x) în două puncte separate de axa (O_y).

b) Să se demonstreze că parabolele G_{f_m} (graficul funcţiei f_m) trec printr-un punct fix (cu coordonatele independente de *m*).

Problema 2.

Pe latura [*AB*] şi diagonala [*AC*] a paralelogramului *ABCD* se iau punctele *M* şi respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Demonstraţi că punctele *M*, *N* şi *D* sunt coliniare.

Problema 3.

Să se determine patru numere reale în progresie geometrică ştiind că suma termenilor extremi este egală cu triplul mediei aritmetice a termenilor egal depărtaţi de cei extremi, iar primul termen este $a\in\mathbf{R}^*$.

Problema 4.

a) Media vârstelor persoanelor dintr-o cameră este egală cu numărul lor. În cameră intră un bărbat de 29 de ani. Surprinzător, media vârstelor persoanelor rămâne egală cu numărul lor. Câte persoane erau iniţial în cameră?

b) Un elev a ales un număr întreg, l-a înmulţit cu 0,42 şi rezultatul l-a aproximat cu cel mai apropiat întreg. După aceasta a înmulţit numărul astfel obţinut cu 0,42 şi rezultatul l-a aproximat din nou cu cel mai apropiat întreg, ultimul fiind egal cu 8. Ce număr a ales elevul?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

Clasa a X-a

Problema 1.

Rezolvaţi în ***R*** ecuațiile:

a) $\log_2(\log_2(5x-4)) = 1 + \log_2(\log_2 x)$

b) $2^{\sqrt{\log_2(x+1)}} - 2 = 2 - (x+1)^{\sqrt{\log_{x+1} 2}}$

Problema 2.

Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe R.

b) Să se rezolve în ***R*** ecuația $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$. Discuție după valorile parametrului *m.*

Problema 3.

a) Să se demonstreze că: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$

b) Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2}.$

Problema 4.

a) Sisif cară în fiecare zi câte o piatră din vârful unui munte. În prima zi i-au fost necesare 7 ore urcând şi coborând.

A doua zi a petrecut 8 ore urcând şi coborând. În fiecare zi urcă de două ori mai încet decât în ziua precedentă, dar coboară de două ori mai repede. Cât timp va munci în cea de-a treia zi?

a) Pe cele două maluri a ale unui râu se află doi palmieri înalţi de 10m, respectiv 15m. Distanţa dintre ei este de 25m. În vârful fiecărui palmier stă câte o pasăre. La un moment dat, la suprafaţa râului, pe linia ce uneşte palmierii apare un peşte situat la distanţe egale cu cele două păsări. La ce distanţă de palmierul cel mai înalt a apărut peştele?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman- Științe Sociale

Clasa a XI –a

Problema 1.

La livrarea din fabrică către dealer, un autoturism are prețul de 7500 euro. Dealer-ul aplică un adaos comercial de 10%, iar la suma adăugată se aplică un TVA de 20%, obținându-se astfel prețul de vânzare. Un cumpărător achită un avans de 20% din prețul de vânzare, urmând ca restul să fie achitat în 24 de rate lunare egale.

a) Care este prețul de vânzare, fără TVA, al autoturismului?
b) Care este prețul de vânzare al autoturismului cu TVA?
c) Cât este rata lunară?

Problema 2.

În tabelul de mai jos este înregistrată distribuţia elevilor clasei a XI-a după numărul de pagini scrise la simulare la proba de limba română:

Număr pagini	Număr de elevi
0-4	10
4-8	16
8-12	5
12-16	1

Se cere:

a) Calculați media și mediana seriei statistice.
b) Arătaţi că abaterea medie pătratică este mai mică de 3,10.
c) Care este procentul elevilor care au scris mai mult de 8 pagini?

Problema 3.

Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani suma vârstelor celor doi copii va fi egală cu vârsta tatălui.

Problema 4.

La balul de absolvire a liceului participanții sunt așezați câte șase la fiecare masă. Să se arate că la fiecare masă există trei persoane care se cunosc între ele sau trei persoane care nu se cunosc deloc.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman-Științe Sociale

Clasa a XII–a

Problema 1.

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det(A(-1))$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculați $\det(A(1)+A(2)+...+A(n))$.

Problema 2.

Se consideră matricele $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A=aI_3+bB+cB^2$, unde a, b, c sunt numere reale.

a) Să se calculeze B^2 și B^3.

b) Să se demonstreze că $(a+b+c)\det(A)\geq 0$, pentru orice a, b, c numere reale.

Problema 3.

Pentru orice n număr întreg se consideră punctele $A_n(3n+1,\,1-3n)$ și $B_n(2n-1,\,4n-3)$.

a) Determinați aria triunghiului $A_0A_1B_2$.

b) Demonstrați că există k, l numere întregi astfel încât $A_k=B_l$.

Problema 4

Alin și Dan joacă următorul joc. Alin alege un număr a, apoi Dan alege un număr x. După aceasta, Alin alege un număr b și apoi Dan alege un număr y. Formăm matricea $M=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a, b, x, y sunt numere reale.

Matricele de această formă, care au determinantul egal cu 1, se numesc matrice norocoasă. În acest caz, Alin câștigă jocul.

a) Cine câștigă jocul dacă $a = 1$, $b = -1$, $x = 0$, $y = -1$?

b) Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde y este număr real. Arătați că A este o matrice norocoasă.

c) Determinați valorile lui a și b care asigură victoria lui Alin, oricare ar fi alegerile făcute de Dan.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

Clasa a IX–a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Se consideră funcţiile $f_m(x)=(m-1)x^2+2(m-2)x-3+m,\ m\in\mathbf{R},\ m\neq 1$.

a) Să se determine *m* astfel încât G_{f_m} să intersecteze axa (O_x) în două puncte separate de axa (O_y).

b) Să se demonstreze că parabolele G_{f_m} (graficul funcției f_m) trec printr-un punct fix (cu coordonatele independente de *m*).

Soluție:

a) Se impun condiţiile: $\begin{cases}\Delta>0\\ P<0\end{cases}$ Rezultă $\begin{cases}\Delta=4>0\\ P=\dfrac{m-3}{m-1}<0\end{cases}$ ---------- 2 pct.

Obținem $m\in(1,3)$ ---------- 2 pct.

b) Condiţia ca parabolele să treacă printr-un punct fix: Punctul $A(a,b)\in G_{f_m},\ \forall m\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$

Impune $(m-1)a^2+2(m-2)a-3+m=b,\ \forall m\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ ---------- 1 pct.

Rezultă $a=-1$ şi $b=0$ ---------- 2 pct.

Problema 2.

Pe latura [*AB*] şi diagonala [*AC*] a paralelogramului *ABCD* se iau punctele *M* şi respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Demonstraţi că punctele *M*, *N* şi *D* sunt coliniare.

Soluție:

$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ ----------2 pct.

$\overrightarrow{ND}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ ---------- 2 pct.

$\overrightarrow{ND}=-5(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC})$ ---------- 1 pct.

$\overrightarrow{ND}=-5\overrightarrow{NM}$ ---------- 1 pct.

Deducem că punctele $M,\ N,\ D$ sunt coliniare.----------1 pct.

Problema 3.

Să se determine patru numere reale în progresie geometrică ştiind că suma termenilor extremi este egală cu triplul mediei aritmetice a termenilor egal depărtaţi de cei extremi, iar primul termen este $a\in\mathbf{R}^*$.

Soluție:

Scrie numerele a, aq, aq^2, aq^3, unde q este rația progresiei geometrice ----------1 pct.

Impune condiția $a+aq^3=3\cdot\frac{aq+aq^2}{2}$ ---------- 1 pct.

Aduce la forma $2(1+q^3)=3\cdot q(q+1)$ ---------- 1 pct.

Obține ecuația $(q+1)(2q^2-5q+2)=0$ ---------- 1 pct.

Rezultă: $q_1=-1,\ q_2=2,\ q_3=\frac{1}{2}$ ---------- 2 pct.

Obținem progresiile geometrice: $\begin{cases}\dots\\ -a;\ -a;\ a;\ -a\\ \dots\\ \dots\\ a;\ 2a;\ 4a;\ 8a\\ \dots\\ \dots\\ a;\ \frac{a}{2};\ \frac{a}{4};\ \frac{a}{8}\\ \dots\end{cases}$ ---------- 1 pct.

Problema 4.

a) Media vârstelor persoanelor dintr-o cameră este egală cu numărul lor. În cameră intră un bărbat de 29 de ani. Surprinzător, media vârstelor persoanelor rămâne egală cu numărul lor. Câte persoane erau inițial în cameră?

b) Un elev a ales un număr întreg, l-a înmulțit cu 0,42 și rezultatul l-a aproximat cu cel mai apropiat întreg. După aceasta a înmulțit numărul astfel obținut cu 0,42 și rezultatul l-a aproximat din nou cu cel mai apropiat întreg, ultimul fiind egal cu 8. Ce număr a ales elevul?

Soluție:

a) Fie $v_1, v_2, ..., v_n$, vârstele celor n persoane.

Avem: $\frac{v_1+v_2+...+v_n}{n}=n$ ……1 pct.

Apoi $\frac{v_1+v_2+...+v_n+29}{n+1}=n+1$ ……1 pct.

Rezultă $\frac{n^2+29}{n+1}=n+1\Rightarrow n=14$ ……1 pct.

b) Fie $x\in\mathbf{Z}$ numărul ales de elev și $y\in\mathbf{Z}$ rezultatul primei aproximări.

Din enunț deducem $y-0,5\le x\cdot 0,42<y+0,5$ (1) și $7,5\le y\cdot 0,42<8,5$ (2) ……1 pct.

Din relația (2) rezultă $y\in[18,20]$, $y\in\mathbf{Z}$ …… ....…… 1 pct.

Folosind relația (1) obținem $x\in[42,48]$, $x\in\mathbf{Z}$ …… ....……..…… 1 pct.

Elevul a ales unul dintre următoarele numere: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48. ……..…… 1 pct.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Rezolvaţi în ***R*** ecuațiile:

a) $\log_2(\log_2(5x-4)) = 1+\log_2(\log_2 x)$

b) $2^{\sqrt{\log_2(x+1)}} - 2 = 2 - (x+1)^{\sqrt{\log_{x+1} 2}}$

Soluție:

a) Condiţii de existenţă:

$\begin{cases} 5x-4>0 \\ \log_2(5x-4)>0 \\ \log_2 x>0 \end{cases}$. Obține $x\in(1,\infty)$ ---------- 1 pct.

Scrie ecuaţia $\log_2(\log_2(5x-4)) = \log_2(2\log_2 x)$ ---------- 1 pct.

Obține $x^2-5x+4=0$ ---------- 1 pct.

Rezolvă şi alege valoarea $x=4$ ---------- 1 pct.

b) Condiţii de existenţă:

$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ \log_2(x+1)\geq 0 \end{cases}$ Obține $x>0$ ---------- 1 pct.

Notează $\log_2(x+1) = t, t\geq 0$

Obține $x+1=2^t$ şi scrie ecuaţia $2^{\sqrt{t}} - 2 = 2 - 2^{\sqrt{t}}$ ----------1 pct.

Rezultă $x=1$ ---------- 1 pct

Problema 2.

Se consideră funcția $f: R\to R, f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe R.

b) Să se rezolve în ***R*** ecuația $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$. Discuție după valorile parametrului *m*.

Soluție:

a) Explicitează funcția ---------- 1 pct.

Studiază monotonia pe intervalul (-∞, 0) ---------- 1 pct.

Studiază monotonia pe intervalul (0, +∞) ---------- 1 pct.

Concluzie ---------- 1 pct

b) Rezolvă $f(x)=m, x<0$ și găsește $x=\frac{m}{m+1}$, $m\in(-1,0)$. ---------- 1,5 pct

Rezolvă $f(x)=m, x\geq 0$ și găsește $x=\frac{m}{1-m}, m\in[0,1)$ ---------- 1,5 pct

Problema 3.

a) Să se demonstreze că: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

b) Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2}$.

Soluție:

a) Notează $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=a$ şi $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=b$ ---------- 1 pct.

Deduce că $a\cdot b=2$ ---------- 1 pct.

Notează $a+b=t$ şi obține ecuaţia $t^3-6t-40=0$ ----------1 pct.

Obține $t=4$ ----------1 pct

b) Obține condiţia de existenţă $x\in[5,7]$ ---------- 1 pct.

Rezultă $(7-x)(x-5)=0$ ---------- 1 pct.

Rezultă $x=5$ sau $x=7$ ---------- 1 pct.

Problema 4.

a) Sisif cară în fiecare zi câte o piatră din vârful unui munte. În prima zi i-au fost necesare 7 ore urcând şi coborând.

A doua zi a petrecut 8 ore urcând şi coborând. În fiecare zi urcă de două ori mai încet decât în ziua precedentă, dar coboară de două ori mai repede. Cât timp va munci în cea de-a treia zi?

b) Pe cele două maluri a ale unui râu se află doi palmieri înalţi de 10m, respectiv 15m. Distanţa dintre ei este de 25m. În vârful fiecărui palmier stă câte o pasăre. La un moment dat, la suprafaţa râului, pe linia ce uneşte palmierii apare un peşte situat la distanţe egale cu cele două păsări. La ce distanţă de palmierul cel mai înalt a apărut peştele?

Soluție:

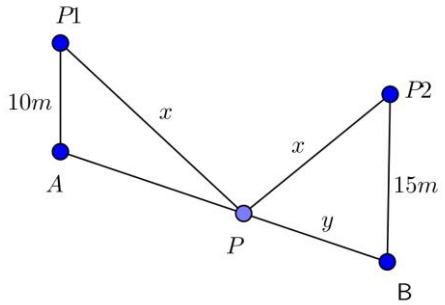
a) Notează x – timpul de urcare în prima zi şi cu $(7-x)$ timpul de coborâre ---------- 1 pct.

A doua zi timpul de urcare este $2x$ şi de coborâre este $8-2x$ ---------- 1 pct.

Din $8-2x=\frac{7-x}{2}$ obţine $x=3$ ---------- 1 pct.

A treia zi obţine timpul de urcare 12 ore şi de coborâre 1oră (aşadar a treia zi munceşte 13 ore)------- 1 pct.

b) Desen ---------- 1 pct.



Aşadar $x^2=y^2+15^2$ şi $x^2=10^2+(25-y)^2$ ---------- 1 pct.

Rezultă $y=10$ ---------- 1 pct.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman- Științe Sociale

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

La livrarea din fabrică către dealer, un autoturism are prețul de 7500 euro. Dealer-ul aplică un adaos comercial de 10%, iar la suma adăugată se aplică un TVA de 20%, obținându-se astfel prețul de vânzare. Un cumpărător achită un avans de 20% din prețul de vânzare, urmând ca restul să fie achitat în 24 de rate lunare egale.

a) Care este prețul de vânzare, fără TVA, al autoturismului?
b) Care este prețul de vânzare al autoturismului cu TVA?
c) Cât este rata lunară?

Soluție:

a) 7500+10%·7500=8250 (euro)……2p
b) 8250+20%·750=8400 (euro)……..……...……2p
c) 20%·8400=1680 (euro)……..……1p
Rata lunară este: (8400-1680):24=280 (euro)……2p

Problema 2.

În tabelul de mai jos este înregistrată distribuția elevilor clasei a XI-a după numărul de pagini scrise la simulare la proba de limba română:

Număr pagini	Număr de elevi
0-4	10
4-8	16
8-12	5
12-16	1

Se cere:
a) Calculați media și mediana seriei statistice.
b) Arătaţi că abaterea medie pătratică este mai mică de 3,10.
c) Care este procentul elevilor care au scris mai mult de 8 pagini?

Soluție:

a) Observă că seria de frecvenţe pe intervale de variaţie are valorile frecvenţelor x_i uniform distribuite.

Nr. pagini	Nr. elevi	x_i	$x_i f_i$	Me	$x^2 f_i$
0-4	10	2	20	10	40
4-8	16	6	96	26	576
8-12	5	10	50	31	500
12-16	1	14	14	32	196
	T:32		T:180		T:1312

$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$ =180/32=5.625……1p

Notăm cu L_{Me} locul medianei *Me* în cadrul seriei statistice:

L_{Me}= $\frac{\sum f_i + 1}{2}$ =33/2=16.5 => $Me \in [4,8]$(intervalul median)……1p

Cumulează crescător frecvenţele absolute şi se determină acea frecvenţă cumulată crescător care este imediat mai mare sau egală cu locul medianei (*LMe*). Intervalul care corespunde frecvenţei absolute cumulate ce îndeplineşte condiţia de mai sus este intervalul median. Calculăm *Me* după formula:

$Me = x_0 + \frac{h \cdot L_{Me} - F_{Me}}{f_{Me}}$ = 4+(4·16,5-8)/16=7,63……1p

S-a notat astfel: x_0=4 este lungimea intervalului median; F_{Me}=8 suma frecvenţelor până la intervalul median; f_{Me}=16 frecvenţa absolută a intervalului median.

b) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \overline{x^2}$ =1312/32 – $5{,}625^2$ =41-31,640625=9,359375…….....1p

Finalizare $\sigma \cong 3{,}06 < 3{,}10$……1p

c) calculăm procentul elevilor care au scris mai mult de 8 pagini:

W=*m*/*n*=(5+1)/32=0,1875 sau 18,75%=> 18,75% au scris mai mult de 8 pagini…….2p

Problema 3.

Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani suma vârstelor celor doi copii va fi egală cu vârsta tatălui.

Soluție:

Fie *a* vârsta fiului mai mic, *b* vârsta fiului mai mare și *x* vârsta tatălui ….……1p

Din enunț avem:

$$\begin{cases} x + 7 = 6a \\ 2 \cdot (b + 15) = x + 15 \\ (a + 18) + (b + 18) = x + 18 \end{cases}$$ ……..….3p

Obține: $a = 7$ ani; $b = 10$ ani; și $x = 35$ ani ……..….3p

Problema 4.

La balul de absolvire a liceului participanții sunt așezați câte șase la fiecare masă. Să se arate că la fiecare masă există trei persoane care se cunosc între ele sau trei persoane care nu se cunosc deloc.

Soluție:

Se reprezintă persoanele de la o masă oarecare prin puncte. Fiecare pereche de puncte este unită printr-un segment roșu sau albastru după cum persoanele se cunosc sau nu. Se obține un graf complet G_6 cu 6 vârfuri și 15 muchii. ……..…….……3p

Alegem unul din cele șase puncte și îl notăm cu P. Cel puțin trei din cele cinci muchii ce pleacă din P sunt de aceeași culoare; le colorăm, de exemplu, cu roșu. Notăm extremitățile acestor 3 muchii roșii cu A, B și cu C ……..……..…1p

Dacă una din cele 3 laturi ale triunghiului ABC este roșie, am obținut un triunghi roșu (de exemplu muchia AB este roșie și prin urmare triunghiul PAB este roșu). ……..1p

Dacă nu, atunci triunghiul ABC este albastru. Prin urmare, în ambele cazuri vom găsi un triunghi de aceeași culoare. Prin urmare, concluzia problemei este demonstrată ……2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman-Științe Sociale

Clasa a XII–a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det(A(-1))$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculați $\det(A(1)+A(2)+...+A(n))$.

Soluție:

a) $\det(A(-1))=0$. ……**1 p**

b) $A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix} -x^2+1 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}$ …….. **1 p**

Din egalitatea $A(x)\cdot A(-x)=I_2$ rezultă $x = 0$. ……**1 p**

c) Fie $B=A(1)+A(2)+...+A(n)=\begin{pmatrix} 1+2+...+n & n \\ n & 1+2+...+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$. …**2p**

$\det(B)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-n^2=\frac{n^2}{4}\left[(n+1)^2-4\right]=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$. pentru orice n număr natural nenul ……**2 p**

Problema 2.

Se consideră matricele $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A=aI_3+bB+cB^2$, unde a, b, c sunt numere reale.

a)Să se calculeze B^2 și B^3.

b) Să se demonstreze că $(a+b+c)\det(A)\geq 0$, pentru orice a, b, c numere reale.

Soluție:

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ……**2 p**

$B^3 = I_3$. ……..**1 p**

b) $\det(A) = (a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. ……**2 p**

$(a+b+c)\cdot\det(A) = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)^2\cdot\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$. ……..**2 p**

Problema 3.

Pentru orice *n* număr întreg se consideră punctele $A_n(3n+1,\ 1-3n)$ și $B_n(2n-1,\ 4n-3)$.

a) Determinați aria triunghiului $A_0A_1B_2$.

b) Demonstrați că există *k*, *l* numere întregi astfel încât $A_k = B_l$.

Soluție:

a) $A_0(1,1)$, $A_1(4,-2)$, $B_2(3,5)$ ……..**2 p**

Aria este egală cu 9. ……...**1 p**

b) Avem: $3k + 1 = 2l - 1$, $1 - 3k = 4l - 3$ ……**2 p**

Rezultă $k = 0$, $l = 1$. **……2 p**

Problema 4

Alin și Dan joacă următorul joc. Alin alege un număr *a*, apoi Dan alege un număr *x*. După aceasta, Alin alege un număr *b* și apoi Dan alege un număr *y*. Formăm matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde *a, b, x, y* sunt numere reale.

Matricele de această formă, care au determinantul egal cu 1, se numesc matrice norocoasă. În acest caz, Alin câștigă jocul.

a) Cine câștigă jocul dacă $a = 1$, $b = -1$, $x = 0$, $y = -1$?

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde *y* este număr real. Demonstrați că *A* este o matrice norocoasă.

c) Determinați valorile lui *a* și *b* care asigură victoria lui Alin, oricare ar fi alegerile făcute de Dan.

Soluție:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(M) = -1$. ……**2 p**

Dan câștigă. ……..**2 p**

b) Matricea *A* este de forma cerută. ($a = 0$, $b = 1$, $x = 0$, *y* este număr real) și $\det(A) = 1$……..**1 p**

c) Dacă $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(M) = b + axy$. ……..**1 p**

Alin câștigă indiferent de alegerile lui Dan dacă $a = 0$, $b = 1$. ……**.....1 p**