MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX -a

Problema 1.

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+mx+2017$, unde $m\in\mathbf{R}$

a) Determinați valoarea lui m știind că $f(-1)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Dacă $f(1)=f(4)$, să se demonstreze că $f(2)=f(3)$.

c) Dacă m este un număr întreg impar, să se demonstreze că ecuația $f(x)=0$ nu are rădăcini întregi.

Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC, punctele M, N și P astfel încât: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ și Q mijlocul segmentului $[PM]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$.

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare.

c) Calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Problema 3.

a) Pentru $q\in\mathbb{R}$ se consideră numerele $a=q^2-q+1$ și $b=q^2+q+1$. Să se demonstreze că $a\cdot b\geq 1$, oricare ar fi $q\in\mathbb{R}$.

b) Determinați primul termen și rația unei progresii geometrice crescătoare $(b_n)_{n\geq 1}$, având termeni pozitivi, știind că $b_1+b_2+b_3=7$ și $b_1^2+b_2^2+b_3^2=21$ (utilizând, eventual, identitatea obținută la punctul anterior).

Problema 4.

Patru persoane A, B, C, D au primit împreună pentru efectuarea unei lucrări suma de 2017 lei. Știind că A a primit cel mai mult, fiecare a primit mai mult de 100 de lei și A împreună cu D au primit cu 537 de lei mai puțin decât B împreună cu C, să se determine ce sumă a primit A? (sumele primite sunt numere naturale)

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a

Problema 1.

Se consideră numerele reale x şi y astfel încât $2^x = 3$ şi $3^y = 4$.

a) Demonstraţi că $x \cdot y = 2$;

b) Demonstraţi că $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$;

c) Demonstraţi că $y \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ şi deduceţi că $x > y$.

Problema 2.

a) Verificaţi egalitatea $a + a^2 + a^3 - 3 = (a-1)\left(a^2 + 2a + 3\right)$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

b) Rezolvaţi în R ecuaţia $2^x + 4^x + 8^x = 3$;

c) Să se rezolve ecuaţia $4\log_2 x + 8\log_4^2 x + 27\log_8^3 x = 24$, $x \in (0, \infty)$.

Problema 3.

Se consideră numărul complex $z = 1 + i\sqrt{3} + m\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Demonstraţi că $|z| = 2\sqrt{m^2 + m + 1}$;

b) Să se determine m astfel încât modulul numărului z să fie minim;

c) Dacă $z^3 \in \mathbb{R}$, demonstraţi că $z^3 = -8$.

Problema 4.

Doi fraţi au în proprietate comună un teren în forma trapezului *ABCD*. Ei hotărasc să împartă terenul în două părţi cu aceeaşi suprafaţă şi să le separe printr-un gard *MN*.

a) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi alese ca mijloace ale bazelor trapezului.

b) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi dispuse în altă poziţie pe cele doua baze?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

Problema 1.

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-(1+x)^2}{x}$.

Problema 2.

O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe se modifică în timp după legea: $T(t)=\sqrt{t^2+at+b}-ct+5,$ unde $a,b,c\in\mathbf{R}$ sunt constante ce trebuie determinate și în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a,b,c\in\mathbf{R}$ știind că $T(1)=7$ și $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8.$

b) Cu a,b,c astfel determinați, stabiliți dacă este posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0°.

Problema 3.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $A\in M_3(R)$.

a) Demonstrați că $A^2=6A.$

b) Determinați $a\in R$ astfel încât matricea $Y=aA-I_3$ să fie inversa matricei $X=A-I_3$.

c) Demonstrați că $I_3+A+A^2+A^3\ldots+A^{2017}=\frac{6^{2018}-5\cdot 6^{2017}-1}{5}\cdot A+I_3$.

Problema 4.

Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\in M_2(R)$

Demonstrați că

a) $\det(A-xI_2)>0,\ \forall x\in\mathbf{R}$;

b) $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)\in\mathbb{N}$;

c) Ecuația $X\cdot A-A\cdot X=A$ nu are soluții în $M_2(R)$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Să se determine funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care admite primitive astfel încât $f(1)=1$ și

$$\int f(x)dx = -x^2 f(x) + C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

b) Să se calculeze integrala $I(x)=\int \dfrac{\cos x-\sin x}{e^{-x}+\cos x}dx,\ x<0.$

Problema 2.

Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e+e^{2x}}$. Se cere:

a) Demonstrați că $f(x)+f(1-x)=1,\ (\forall)x\in\mathbf{R}.$

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0.$

c) Calculați $I=\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx.$

Problema 3.

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție "$\circ$" prin
$x\circ y = 4(x+1)(y+1)-1,\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$

a) Demonstrați că legea de compoziție este asociativă și determinați elementul neutru.

b) Calculați $-\frac{2017}{1008}\circ\left(-\frac{2016}{1008}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{1008}\right).$

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea "$\circ$ ".

Problema 4.

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție "$*$" prin $x*y=\sqrt[3]{xy},\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}.$

a) Demonstrați că legea "$*$" nu este asociativă.

b) Fie $H=\{-1,0,1\}$. Demonstrați că H este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu legea "$*$" și că operația indusă de "$*$" pe H este asociativă.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ 18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+mx+2017$, unde $m\in\mathbf{R}$

a) Determinaţi valoarea lui m ştiind că $f(-1)$, $f(1)$ şi $f(2)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Dacă $f(1)=f(4)$, să se demonstreze că $f(2)=f(3)$.

c) Dacă m este un număr întreg impar, să se demonstreze că ecuaţia $f(x)=0$ nu are rădăcini întregi.

Soluție:

a) Obține $f(-1)=2018-m$, $f(1)=2018+m$, $f(2)=2021+2m$ ……..…..1 punct

Finalizare: $2(2018+m)=2021+2m+2018-m\Leftrightarrow m=3$ ……..……..…1 punct

b) Din condiția $f(1)=f(4)$ obține m= -5……1 punct

Verifica $f(2)=f(3)=2011$ …….……..…..1 punct

c) Presupunem ca ecuația ar avea o rădăcina întreagă r. Atunci $r^2+r\cdot m+2017=0$

Dacă r = număr par , atunci par+par+impar=0 – imposibil…….…….…..1 punct

Dacă r = număr impar , atunci impar+impar+impar=0 –imposibil …….…….1 punct

Finalizare: Presupunerea făcută este falsă, deci ecuația nu are rădăcini întregi…….. 1 punct

Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC, punctele M, N şi P astfel încât: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ şi Q mijlocul segmentului $[PM]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$.

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare.

c) Calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Soluție:

a) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA}$ ……2 puncte

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}\right)=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\cdot\overrightarrow{BA}$ ……..……..……2 puncte

b) $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{8}\cdot\overrightarrow{BN}$ rezultă *B, Q, N* puncte coliniare…….…… 2 puncte

c) $\frac{BQ}{BN}=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{BQ}{QN}=\frac{3}{5}$ ……. 1 punct

Problema 3.

a) Pentru $q\in\mathbb{R}$ se consideră numerele $a=q^2-q+1$ şi $b=q^2+q+1$. Să se demonstreze că $a\cdot b\geq 1$, oricare ar fi $q\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi primul termen şi raţia unei progresii geometrice crescătoare $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$, având termeni pozitivi, ştiind că $b_1+b_2+b_3=7$ şi $b_1^2+b_2^2+b_3^2=21$ (utilizând, eventual, identitatea obţinută la punctul anterior).

Soluție:

a) Obține $a\cdot b=q^4+q^2+1$……..……..… 2 puncte

Finalizare : Deoarece $q^4\geq 0,\ q^2\geq 0$ deducem ca $a\cdot b\geq 1$……..…… 1 punct

b) Obține relațiile $b_1\left(q^2+q+1\right)=7$ si $b_1^2\left(q^4+q^2+1\right)=21$…….. 1 punct

Folosind $q^4+q^2+1=\left(q^2+q+1\right)\left(q^2-q+1\right)$, obține $b_1\left(q^2-q+1\right)=3$…….……1 punct

Rezolvă ecuația $2q^2-5q+2=0$, obținând soluțiile $q_1=2$ și $q_2=\frac{1}{2}$…….…....1 punct

Numai $q_1=2$ convine și în acest caz $b_1=1$……1 punct

Problema 4.

Patru persoane A, B, C, D au primit împreună pentru efectuarea unei lucrări suma de 2017 lei. Ştiind că A a primit cel mai mult, fiecare a primit mai mult de 100 de lei şi A împreună cu D au primit cu 537 de lei mai puțin decât B împreună cu C, să se determine ce sumă a primit A? (sumele primite sunt numere naturale)

Soluție:

Dacă a, b, c, d sunt sumele primite de către A, B, C respectiv D , atunci a+b+c+d=2017, a>b, a>c, a>d și a+d=b+c-537 …….....……..2 puncte
Obține a+d=740 și b+c=1277…….…….....……2 puncte
Deoarece a >b, a>c, a>d deduce $a>638,5$…….…….....……1 punct
Daca a=639, atunci d=101…….…….……..1 punct
Daca a=640, atunci d=100, nu convine …….…….……1 punct

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Se consideră numerele reale x şi y astfel încât $2^x = 3$ şi $3^y = 4$.

a) Demonstrați că $x \cdot y = 2$;

b) Demonstraţi că $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$;

c) Demonstraţi că $y \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ şi deduceţi că $x > y$.

Soluție:

a) Obține $x = \log_2 3,\ y = \log_3 4$ ..... 1 punct

Obține $y = \frac{2}{\log_2 3}$ 1punct

Finalizare : $x \cdot y = 2$ ..... 1 punct

b) $x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_2 3 > \log_2 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3 > \sqrt{8}$, adevărat..... 2 puncte

c) $y < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 4 < \log_3 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 4 < \sqrt{27}$ adevărat..... 1 punct

Finalizare $x > \frac{3}{2} > y$, deci $x > y$ ..... 1 punct

Problema 2.

a) Verificaţi egalitatea $a + a^2 + a^3 - 3 = (a-1)\left(a^2 + 2a + 3\right),\ \forall a \in \mathbb{R}$;

b) Rezolvaţi în R ecuaţia $2^x + 4^x + 8^x = 3$;

c) Să se rezolve ecuaţia $4\log_2 x + 8\log_4^2 x + 27\log_8^3 x = 24,\ x \in (0, \infty)$.

Soluție:

a) Verificarea egalității ..... 1 punct

b) Notând $2^x = y$ Obține $y^3 + y^2 + y = 3$ .....1 punct

Din $y^3 + y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y^2 + 2y + 3\right) = 0$ rezultă y=1..... 1 punct

Finalizare: x=0..... 1 punct

c) Aducând logaritmii în baza 2 obține $\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)+\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)^2+\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)^3=3$ ..... 1 punct

Dacă $y=\frac{\log_2 x}{2}$ rezulta $y+y^2+y^3=3$ ..... 1 punct

Finalizare: y=1, deci x=4……..……..….1 punct

Problema 3.

Se consideră numărul complex $z=1+i\sqrt{3}+m\left(-1+i\sqrt{3}\right)$, unde $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) Demonstraţi că $|z|=2\sqrt{m^2+m+1}$;

b) Să se determine m astfel încât modulul numărului z să fie minim;

c) Dacă $z^3\in\mathbb{R}$, demonstraţi că $z^3=-8$.

Soluție:

a) Obține $z=1-m+i\sqrt{3}(1+m)$ ……..….. 1 punct

Obține $|z|=2\sqrt{m^2+m+1}$ ……..1 punct

b) Obține $|z|=2\sqrt{m^2+m+1}=2\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq\sqrt{3},\forall m\in\mathbb{R}$ …… 1 punct

Finalizare : |z| este minim pentru $m=-\frac{1}{2}$ ……1 punct

c) Obține $z^3=(1-m)\left(-8m^2-20m-8\right)-12\sqrt{3}m(m+1)i$ ……1 punct

$z^3\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m(1+m)=0$ ……..……1 punct

Convine numai $m=0$ şi în acest caz $z^3=-8$ ……..……1 punct

Problema 4.

Doi fraţi au în proprietate comună un teren în forma trapezului *ABCD*. Ei hotărasc să împartă terenul în două părţi cu aceeaşi suprafaţă şi să le separe printr-un gard *MN*.

a) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi alese ca mijloace ale bazelor trapezului.

b) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi dispuse în altă poziţie pe cele doua baze?

Soluție:

a) Daca h- este înălțimea trapezului scrie $A=\frac{(B+b)h}{2}$ ……..…. 1 punct

Obține $A_{AMND}=\frac{(AM+DN)h}{2}$ ……1 punct

Scrie $A_{AMND}=\frac{(AB+DC)h}{4}$ ……...1 punct

Obține $A_{BMNC}=\frac{(BM+CN)h}{2}=\frac{(AB+CD)\cdot h}{4}$ ……...……1 punct

Finalizare: Punctele *M, N* pot fi alese ca mijloace ale bazelor …… 1 punct

b) Este necesară condiția $A_{AMND}=A_{BMNC}$ ……..……1 punct

Obținem $AM+DN=BM+CN\Leftrightarrow AM-BM=CN-DN$, deci nu exista alta dispunere a punctelor *M* si *N*……..……1 punct

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-(1+x)^2}{x}$.

Soluție:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}=\dfrac{2}{9}$ ……..……3p

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-(1+x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)(e^x+1+x)}{x}$ ……..……2p

$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x}-1)(e^x+1+x)=2(lne-1)=2\cdot 0=0$ ……..……2p

Problema 2.

O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe se modifică în timp după legea: $T(t)=\sqrt{t^2+at+b}-ct+5$, unde $a,b,c\in\mathbf{R}$ sunt constante ce trebuie determinate și în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a,b,c\in\mathbf{R}$ știind că $T(1)=7$ și $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8$.

b) Cu a,b,c astfel determinați, stabiliți dacă este posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0°.

Soluție:

a) $T(1)=7\Rightarrow\sqrt{a+b+1}=c+2$ ……..……...……..1p

$\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+at+b}-ct\right)=3$ ……..……..……..……..1p

Este necesar ca $c>0$ ……..……..……..1p

Obținem: $c=1,\ a=6$ ……..……..……..……..2p

Din $T(1)=7\Rightarrow b=2$ ……..……..1p

b) $T(t)=0 \Rightarrow \sqrt{t^2+6t+2}=t-5 \Rightarrow t=\frac{23}{16}$, dar $\frac{23}{16}-5<0$, deci nu este posibil ca temperatura substanței să fie 0° în nici un moment al experimentului ……..1p

Problema 3.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $A \in M_3(R)$.

a) Demonstrați că $A^2=6A$.

b) Determinați $a \in R$ astfel încât matricea $Y=aA-I_3$ să fie inversa matricei $X=A-I_3$.

c) Demonstrați că $I_3+A+A^2+A^3 \ldots +A^{2017}=\frac{6^{2018}-5\cdot 6^{2017}-1}{5}\cdot A+I_3$.

Soluție:

a) Calcul direct, verifică relația……1p

b) Din $XY=I_3 \Leftrightarrow (A-I_3)(aA-I_3)=I_3 \Leftrightarrow (5a-1)A+I_3=I_3 \Rightarrow a=\frac{1}{5}$ ……1p

Deci $Y=\frac{1}{5}A-I_3$ este inversa matricei X. ……1p

c) Fie $S=I_3+A+A^2+A^3+\cdots+A^{2017}$, avem $S\cdot X=A^{2018}-I_3 \ /\cdot Y$……2p

Finalizare

$S=\left(A^{2018}-I_3\right)\left(\frac{1}{5}A-I_3\right) \Leftrightarrow S=\frac{1}{5}A^{2019}-A^{2018}-\frac{1}{5}A+I_3;$

$A^{2019}=6^{2018}\cdot A$; $A^{2018}=6^{2017}\cdot A$,

rezultă $S=\frac{6^{2018}-5\cdot 6^{2017}-1}{5}A+I_3$ ……2p

Problema 4.

Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \in M_2(R)$

Demonstrați că

a) $\det(A-xI_2)>0,\ \forall x \in \mathbf{R}$;

b) $\det(A+I_2)+\det(A-I_2) \in \mathbb{N}$;

c) Ecuația $X\cdot A-A\cdot X=A$ nu are soluții în $M_2(R)$.

Soluție:

a) Prin calcul $\det(A-xI_2)=x^2-\sqrt{3}x+2=$ ……1p

$=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{5}{4}>0,\ \forall x \in \mathbf{R}$ ……1p

b) $\det(A-I_2)=3-\sqrt{3}$

$\det(A+I_2)=3+\sqrt{3}$

$\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=6 \in \mathbb{N}$ ……2p

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ astfel încât $X\cdot A-A\cdot X=A$

Relația devine $\begin{pmatrix}-2b-c & a+b\sqrt{3}-d\\ -2d+2a-c\sqrt{3} & c+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ ……2p

Se obține sistemul $\begin{cases} -2b-c=0 \\ a+b\sqrt{3}-d=1 \\ -2d+2a-c\sqrt{3}=-2 \\ c+2b=\sqrt{3} \end{cases}$

Din prima și ultima ecuație se obține $0=\sqrt{3}$, imposibil.

Deci ecuația nu are soluții. ……..……..…1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

a) Să se determine funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care admite primitive astfel încât $f(1)=1$ și $\int f(x)dx=-x^2f(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze integrala $I(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{e^{-x}+\cos x}dx,\ x<0$.

Soluție:

a) Derivând egalitatea dată , membru cu membru, avem:

$f(x)=-2xf(x)-x^2f'(x)$ ……..1p

Obținem $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1+2x}{x^2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}$ ……1p

Integrând ultima egalitate, avem $lnf(x)=\frac{1}{x}-2lnx+c$,

Rezultă $f(x)=e^{\frac{1}{x}-2lnx+c}$ ……1p

$f(1)=1\Rightarrow c=-1$, deci $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1-x}{x}}$, $x\in(0,\infty)$……1p

b) $I=\int\frac{e^{-x}+cosx-e^{-x}-sinx}{e^{-x}+cosx}dx=\int(1-\frac{e^{-x}+sinx}{e^{-x}+cosx})dx$ ……1p

$=\int dx+\int\frac{(e^{-x}+cosx)'}{e^{-x}+cosx}dx$ ……1p

$=x+\ln(e^{-x}+cosx)+c,\ c\in\mathbb{R}$. ……1p

Problema 2.

Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{e^{2x}}{e+e^{2x}}$. Se cere:

a) Demonstrați că $f(x)+f(1-x)=1,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0$.

c) Calculați $I=\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx$.

Soluție:

a) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1-2x}}$. Verifică egalitatea: $f(x)+f(1-x)=1,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$. ……..2p

b) $F(x)=\int f(x)dx=\frac{1}{2}\ln(e+e^{2x})+c$ ……2p

$F(0)=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}\ln(1+e)$ ……..……1p

c) În $I=\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx$ schimbăm variabila $x=1-t \Rightarrow I=\int_0^1 f(1-t)\sin(\pi t)dt$ ……..1p

$2I=\int_0^1 \sin(\pi x)dx=\frac{2}{\pi} \Rightarrow I=\frac{1}{\pi}$ ……..……1p

Problema 3.

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție "$\circ$" prin $x \circ y = 4(x+1)(y+1)-1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că legea de compoziție este asociativă și determinați elementul neutru.

b) Calculați $-\frac{2017}{1008} \circ \left(-\frac{2016}{1008}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{1008}\right)$.

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea "$\circ$ ".

Soluție:

a) Justifică asociativitatea ……..……..……...……1p

Elementul neutru $e=-\frac{3}{4}$ ……..……..……....……..……1p

b) $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}$ ……..……..…...……...……..1p

În compunere există $-\frac{1008}{1008}=-1$. (-1 este elementul "absorbant" sau "distrugător")

Deci compunerea celor 2017 elemente este -1. ……..……..……..…..……1p

c) $x'=-\frac{16x+15}{16(x+1)}$, $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ ……..……..……..……2p

$x'=x \Rightarrow x_1=-\frac{5}{4}, \ x_2=-\frac{3}{4}$. ……..……..……..1p

Problema 4.

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție "$*$" prin $x*y=\sqrt[3]{xy}, \ (\forall)x,y \in \mathbf{R}$.

a) Demonstrați că legea "$*$" nu este asociativă.

b) Fie $H=\{-1,0,1\}$. Demonstrați că H este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu legea "$*$" și că operația indusă de "$*$" pe H este asociativă.

Soluție:

a) Este suficient un contraexemplu.

$$\left.\begin{array}{l}(1*2)*3=\sqrt[3]{2}*3=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27}}=\sqrt[9]{54}\\ 1*(2*3)=1*\sqrt[3]{6}=\sqrt[9]{6}\end{array}\right\}$$ ……..1p

Rezultă că $(1*2)*3 \neq 1*(2*3)$, deci operația "$*$"nu este asociativă. ……..……...1p

b) Tabla legii de compoziție "$*$" relative la mulțimea H este:

*	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

……..…1p

Deducem că $x*y \in H, \ (\forall)x,y \in H$, deci H este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu operația "$*$" ……1p

Fie "$\circ$" legea de compoziție indusă de legea "$*$"pe H.

Pentru orice $x \in H$ avem $\sqrt[3]{x}=x$ ……..1p

Avem:

$$\begin{cases} a\circ(b\circ c)=a\circ\sqrt[3]{bc}=a\circ(bc)=\sqrt[3]{abc}=abc \\ (a\circ b)\circ c=\sqrt[3]{ab}\circ c=(ab)\circ c=\sqrt[3]{abc}=abc \end{cases},\ (\forall)\, a,b,c\in H$$

Așadar legea de compoziție "$\circ$"este asociativă ……2p