MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Determinaţi numerele întregi x pentru care fracţia $\frac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.

b) Determinaţi numerele raţionale x pentru care fracţia $\frac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.

Problema 2.

Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural nenul n, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\leq\frac{5}{6}.$$

Problema 3.

a) Demonstraţi că suma inverselor lungimilor a două înălţimi ale unui triunghi este mai mare decât inversul lungimii celei de-a treia înălţimi a triunghiului.

b) Un triunghi neisoscel are două înălţimi de lungimi 2 respectiv 5. Determinaţi lungimea celei de-a treia înălţimi, ştiind că este tot un număr natural.

Problema 4.

La ora $14:30$, din Iaşi plecă un tren care ajunge la Bucureşti la ora $22:00$. În aceeaşi zi şi pe acelaşi traseu, la ora $16:00$, din Bucureşti pleacă un tren care ajunge la Iaşi la ora $23:00$. Presupunem că fiecare dintre cele două trenuri parcurge traseul cu viteză constantă.

Stabiliţi, cu eroare de cel mult un minut, care este ora întâlnirii celor două trenuri.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real -Științe ale Naturii

CLASA A X-A

Problema 1.

Se dau numerele reale $x, y, z \in (0, +\infty)$. Demonstrați că au loc inegalitățile:

a) $\sqrt[3]{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \le x+y+z.$

b) $\sqrt[3]{(2x+y)(x+2y)(2y+z)(y+2z)(2z+x)(z+2x)} \le (x+y+z)^2.$

Problema 2.

Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, cu $|a| = |b| = |c|$. Demonstrați că ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are cel puțin o rădăcină de modul 1 dacă și numai dacă $b^2 = ac.$

Problema 3.

Rezolvați ecuația $\left[\frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right] = \lg x.$

Problema 4.

Avem la dispoziție un număr $n \ge 2000$ de saci goi. Alegem 10 dintre aceștia.

În unii dintre cei 10 saci aleși s-au pus câte 9 saci goi, apoi în unii dintre toți sacii goi s-au pus câte 9 saci goi, etc. După câteva operații de acest fel numărul sacilor care nu sunt goi este 223. Care este numărul total de saci pe care îi avem la dispoziție?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real -Științe ale Naturii

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}$

a) Calculați $\det\left(A^2\right)$.

b) Demonstrați că $A^n=\begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

c) Rezolvați în $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ ecuatia $X^{2017}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (Eventual folosiți faptul că $X\cdot X^{2017}=X^{2017}\cdot X$)

Problema 2.

Considerăm mulțimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu trei linii și trei coloane și care au elemente din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Dacă $A\in\mathcal{M}$, demonstrați că $4/\det A$.

c) Dacă $A\in\mathcal{M}$, argumentați că $\det A\in\{-4,0,4\}$.

d) Demonstrați că $\forall A\in\mathcal{M}$, matricea A^{2017} are toate elementele nenule.

Problema 3

Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei dintre ei au culoarea roșie, patru au culoarea galbenă, iar ceilalți cinci au culoarea verde. Se știe că, dacă se întâlnesc doi cameleoni de culori diferite atunci ambii își schimbă culoarea în cea de-a treia culoare, în rest ei nu își schimbă culoarea.

Demonstrați că:

a) Este posibil ca la un moment dat, nici un cameleon să nu aibă culoarea verde.

b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toți cameleonii să aibă culoarea verde.

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție astfel încât $\left|f(x)-x^2\right|\le 2|x|;\ \forall x\in\mathbb{R}$

a) Arătați că $f(0)=0$.

b) Dați un exemplu de funcție care să îndeplinească inegalitatea din enunț.

c) Justificați continuitatea funcției f în origine.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XII -a

Problema 1.

Două lentile având distanţele focale f_1, respectiv f_2 sunt situate la distanţa $d>0$ una faţă de cealaltă; în această situaţie distanţa focală f a sistemului este dată de legea de compoziţie $f=f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$

Considerând legea de compoziţie definită pe $G=(0;+\infty)$, se cere:

a) Să se demonstreze că legea este asociativă.

b) Să se studieze dacă legea admite element neutru.

c) Să se calculeze $\dfrac{d}{2017}\circ\dfrac{d}{2016}\circ\ldots\circ d\circ(2d)\circ(3d)\circ(4d)\circ\ldots\circ(2017d)$.

Problema 2.

Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)$, unde G este primitiva lui g care se anulează în $x=1$.

c) Să se demonstreze : $\int_1^{tgx} f(t)dt+\int_1^{ctgx} g(t)dt=0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Să se demonstreze că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^{x^3} f(t)dt$ este strict crescătoare pe $[0,1]$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)dx\in(1,2)$.

Problema 4.

$G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ şi pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm $H_t=\{A(kt-1)/k\in\mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde " $\cdot$" este înmulţirea matricelor.

a) Să se demonstreze că pentru orice $n, p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

b) Să se demonstreze că, pentru $\forall t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$

c) Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Determinaţi numerele întregi x pentru care fracţia $\frac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.

b) Determinaţi numerele raţionale x pentru care fracţia $\frac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.

SOLUŢIE:

a) Impunem condiţia $(2x-1)|(3x+2)$; atunci $(2x-1)|\left[2(3x+2)-3(2x-1)\right]$, deci $(2x-1)|7$. Obţinem că $x\in\{-3,0,1,4\}$ şi toate aceste patru valori sunt convenabile. **4p**

b) Din $\frac{3x+2}{2x-1}=m\in\mathbb{Z}$ obţinem că $x=\frac{m+2}{2m-3}$, $m\in\mathbb{Z}$. Cum $\frac{m+2}{2m-3}\neq\frac{1}{2},\forall m\in\mathbb{Z}$, rezultă că numerele raţionale x căutate sunt toate numerele de forma $x=\frac{m+2}{2m-3}$, unde $m\in\mathbb{Z}$. **3p**

Problema 2.

Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural nenul n, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\leq\frac{5}{6}.$$

SOLUŢIE:

Avem că $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}>(n+1)\cdot\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$, prin urmare este adevărată inegalitatea din stânga. **3p**

Notăm $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$. Cum $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deducem că $a_n<a_1=\frac{5}{6},\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci este adevărată inegalitatea din dreapta. **4p**

Obs. Se poate folosi inducția matematică.

Problema 3.

a) Demonstraţi că suma inverselor lungimilor a două înălţimi ale unui triunghi este mai mare decât inversul lungimii celei de-a treia înălţimi a triunghiului.

b) Un triunghi neisoscel are două înălţimi de lungimi 2 respectiv 5. Determinaţi lungimea celei de-a treia înălţimi, ştiind că este tot un număr natural.

Gazeta Matematică 9/2016 (Supliment)

SOLUŢIE:

a) Folosind notaţiile uzuale în triunghi, avem că $a=\frac{2S}{h_a}, b=\frac{2S}{h_b}$ şi $c=\frac{2S}{h_c}$. ……..…….... **2p**

Din inegalitatea triunghiului, $(a+b>c)$ rezultă $\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}>\frac{2S}{h_c}$, prin urmare $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}$ …… **2p**

b) Fie $h_a=2, h_b=5$; atunci $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}>\frac{1}{h_c}$ şi $\frac{1}{5}+\frac{1}{h_c}>\frac{1}{2}$. Deducem că $\frac{10}{7}<h_c<\frac{10}{3}$. Cum h_c este număr natural diferit de 2 şi 5 (triunghiul fiind neisoscel), rezultă că $h_c=3$. ……..…… **3p**

Problema 4.

La ora $14:30$, din Iaşi plecă un tren care ajunge la Bucureşti la ora $22:00$. În aceeaşi zi şi pe acelaşi traseu, la ora $16:00$, din Bucureşti pleacă un tren care ajunge la Iaşi la ora $23:00$. Presupunem că fiecare dintre cele două trenuri parcurge traseul cu viteză constantă.
Stabiliţi, cu eroare de cel mult un minut, care este ora întâlnirii celor două trenuri.

SOLUŢIE:

Notăm cu *d* distanţa Iaşi-Bucureşti, în kilometri. Viteza primului tren este $v_1=\frac{d}{7\frac{1}{2}}=\frac{2d}{15}$ km/h iar viteza celui de-al doilea tren este $v_2=\frac{d}{7}$ km/h. ……..……...…..…… **2p**

Fie *x* ora întâlnirii celor două trenuri. Cum suma distanţelor parcurse de cele două trenuri până în momentul *x* este egală cu distanţa Iaşi-Bucureşti, obţinem că $\left(x-14\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2d}{15}+(x-16)\cdot\frac{d}{7}=d$. …… **3p**

Ecuaţia obţinută are soluţia $x=\frac{548}{29}\simeq 18,897$. Ora aproximativă a întâlnirii este $18:54$. ……..... **2p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real -Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a X-a

Problema 1.
Se dau numerele reale $x,y,z\in(0,+\infty)$. Demonstrați că au loc inegalitățile:

a) $\sqrt[3]{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}\le x+y+z.$

b) $\sqrt[3]{(2x+y)(x+2y)(2y+z)(y+2z)(2z+x)(z+2x)}\le(x+y+z)^2.$

(G. M. nr 11/2016)

Soluţie:

a) Folosim inegalitatea mediilor: $\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3},\forall a,b,c\in(0,+\infty)$ **1p**

Cu $a=2x+y,\ b=2y+z$ și $c=2z+x$ obținem inegalitatea de la **a)**.....**2p**

b) Scriem membrul stâng al inegalității de demonstrat ca produsul a doi radicali de ordin 3

$\sqrt[3]{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}\cdot\sqrt[3]{(x+2y)(y+2z)(z+2x)}$ **1p**

Din inegalitatea mediilor avem:

$[1]\ \sqrt[3]{(x+2y)(y+2z)(z+2x)}\le x+y+z$ **1p**

Înmulțind membru cu membru inegalitatea de la **a)** cu inegalitatea $[1]$ obținem inegalitatea de demonstrat (ambii radicali sunt pozitivi) **2p**

Problema 2.
Fie $a,b,c\in\mathbb{C}^*$, cu $|a|=|b|=|c|$. Demostrați că ecuația $az^2+bz+c=0$ are cel puțin o rădăcină de modul 1 dacă și numai dacă $b^2=ac.$

Soluţie:

Necesitate: Notăm rădăcinile ecuației cu $\alpha,\beta;\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},|\alpha|=1$ și scriem relațiile lui Viète **1p**

$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow|\alpha\cdot\beta|=\left|\frac{c}{a}\right|=\frac{|c|}{|a|}=1,$ iar $|\alpha|=1$, obținem $|\beta|=1$, deci $\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha},\ \overline{\beta}=\frac{1}{\beta}$ **1p**

Avem $|\alpha+\beta|^2=\left|-\frac{b}{a}\right|^2=1,$ deci $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=1,$ ce conduce la $(\alpha+\beta)^2=\alpha\beta,$ așadar

$\left(-\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c}{a}\Rightarrow b^2=ac.$ **2p**

Suficiență: Din $b^2 = ac$, cum $a \in \mathbb{C}^*$, se obține $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a}$, așadar $(\alpha+\beta)^2 = \alpha\beta$. ……..... **1p**

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$, iar $\alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ este rădăcină complexă nereală de ordin 3 a unității, deci

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 1 \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$ **1p**

Cum $1 = \frac{|c|}{|a|} = \left|\frac{c}{a}\right| = |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, obținem $|\alpha| = |\beta| = 1$. **1p**

Problema 3.

Rezolvați ecuația $\left[\frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right] = \lg x$.

Soluţie:

a) Condiția de existență a logaritmului: $x > 0$ **1p**

notăm $\left[\frac{x}{2}\right] = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \leq \frac{x}{2} < k+1$ **1p**

$k - \frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} < k + \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} - k < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] < \frac{1}{2}$ **2p**

Obținem că $\left[\frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right] \in \{-1, 0\} \Rightarrow \lg x \in \{-1, 0\}$ **2p**

Dacă $\lg x = -1$, $x = \frac{1}{10}$, iar dacă $\lg x = 0$, $x = 1$. ……..……..……..... **1p**

Problema 4.

Avem la dispoziție un număr $n \geq 2000$ de saci goi. Alegem 10 dintre aceștia.
În unii dintre cei 10 saci aleși s-au pus câte 9 saci goi, apoi în unii dintre toți sacii goi s-au pus câte 9 saci goi, etc. După câteva operații de acest fel numărul sacilor care nu sunt goi este 223. Care este numărul total de saci pe care îi avem la dispoziție?

Soluţie:

Fie x_1 numărul sacilor în care s-au pus câte nouă saci goi în prima operație, x_2 numărul sacilor în care s-au pus câte 9 saci goi în a doua operație, etc. ……..……**2p**

Astfel la prima operație s-au adăugat $9x_1$ saci goi, la a doua $9x_2$ saci goi, etc. ..……..……..……**1p**

În final, după n operații de acest fel numărul sacilor care nu sunt goi este:

$x_1 + x_2 + ... + x_n = 223$ ……..……..……..…**2p**

Numărul total de saci este: : $10 + 9x_1 + 9x_2 + ... + 9x_n = 10 + 9 \cdot 223 = 2017$ ……**2p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real -Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$

a) Calculați $\det\left(A^2\right)$.

b) Demonstrați că $A^n=\begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

c) Rezolvați în $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ ecuatia $X^{2017}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (Eventual folosiți faptul că $X\cdot X^{2017}=X^{2017}\cdot X$)

Soluție:

a) $\det\left(A^2\right)=\left(\det A\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2$ ……**2** puncte

b) Inducție matematică ……**2** puncte

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$

Din $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X\Rightarrow a=d$ si $b=c\Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ……**1** punct

Ecuația $X^{2017}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ devine $\begin{pmatrix} \frac{(a+b)^{2017}+(a-b)^{2017}}{2} & \frac{(a+b)^{2017}-(a-b)^{2017}}{2} \\ \frac{(a+b)^{2017}-(a-b)^{2017}}{2} & \frac{(a+b)^{2017}+(a-b)^{2017}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{cases} (a+b)^{2017}=3 \\ (a-b)^{2017}=1 \end{cases}$ ……**1** punct

Finalizare: $a=\frac{1+\sqrt[2017]{3}}{2}$,

$b=\frac{\sqrt[2017]{3}-1}{2}$ ……**1** punct

Problema 2.

Considerăm mulțimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu trei linii și trei coloane și care au elemente din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Dacă $A\in\mathcal{M}$, demonstrați că $4/\det A$.

c) Dacă $A\in\mathcal{M}$, argumentați că $\det A\in\{-4,0,4\}$.

d) Demonstrați că $\forall A\in\mathcal{M}$, matricea A^{2017} are toate elementele nenule.

Soluție:

a) Fie $\mathcal{M}=\{1,2,...,m\}$ și $N=\{1,2,...,n\}$ mulțimile primelor m respectiv n numere naturale. O matrice cu m linii și n coloane, având elemente reale, este o aplicație $A: M\times N\to\mathbb{R}$. Dacă notăm $A(i,j)=a_{ij};\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$, dăm matricea A printr-un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane.

Există k^l aplicații care pot fi definite pe o mulțime cu l elemente cu valori într-o mulțime cu k elemente.

$card\,\mathcal{M}=2^9=512$ ……..**2** puncte

b) Fie $A\in\mathcal{M}$. Adunăm a treia coloană la primele două coloane (c_1+c_3 respectiv c_2+c_3) Astfel pe primele două coloane ale matricei astfel obținute vom avea elementele $0,2$ sau -2.

Deducem că $4/\det A$……..……...…..**2** puncte

c) $-6\le\det A\le 6$ și din punctul b) $\det A$ este multiplu de 4, obținem că $\det A\in\{-4,0,4\}$ ……...…**2** puncte

d) În $A^n;\ \forall n\ge 1$ avem doar elemente întregi impare, de unde rezultă cerința problemei……..**1** punct

Problema 3

Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei dintre ei au culoarea roșie, patru au culoarea galbenă, iar ceilalți cinci au culoarea verde. Se știe că, dacă se întâlnesc doi cameleoni de culori diferite atunci ambii își schimbă culoarea în cea de-a treia culoare, în rest ei nu își schimbă culoarea.

Demonstrați că:

a) Este posibil ca la un moment dat, nici un cameleon să nu aibă culoarea verde.

b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toți cameleonii să aibă culoarea verde.

Soluție:

a) Notăm cu *R* numărul cameleonilor roșii, cu *V* numărul cameleonilor verzi și cu *G* numărul cameleonilor galbeni. ……..….**1** punct

În tabelul de mai jos, exemplificăm în cinci pași posibilitatea de la punctul a)

R	3	5	7	9	11	10
G	4	3	2	1	0	2
V	5	4	3	2	1	0

…….**..... 2** puncte

b) Analizând posibilitățile apărute în urma întâlnirii a doi cameleoni, căutăm un invariant.

Inițial $R=3,\ G=4,\ V=5$

Dacă se întâlnește unul roșu cu unul verde, vom avea: $R=2,\ G=6,\ V=4$……**1** punct

Dacă se întâlnește unul galben cu unul verde vom avea: $R=5,\ G=3,\ V=4$……...**1** punct

Dacă se întâlnește unul roșu cu unul galben vom avea: $R=2,\ G=3,\ V=7$…….**.....**……...**1** punct

Comparând configurația inițială $(R,G,V)=(3,4,5)$ cu oricare dintre configurațiile rezultate în urma întâlnirii a doi cameleoni, observăm că doar un număr din configurație este multiplu de trei. Dacă ar fi posibil ca toți să fie verzi, am obține configurația $(0,0,12)$ în care toate numerele sunt divizibile cu 3. (FALS)

Așadar nu este posibil în nici un moment ca toți cameleonii să fie verzi ……...……**1** punct

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție astfel încât $\left|f(x)-x^2\right|\le 2|x|;\ \forall x\in\mathbb{R}$

a) Arătați că $f(0)=0$.

b) Dați un exemplu de funcție care să îndeplinească inegalitatea din enunț.

c) Justificași continuitatea funcției f în origine.

Soluție:

a) În inegalitatea din enunț înlocuim pe x cu 0 și avem:

$\left|f(0)-0^2\right|\le 2|0|\Rightarrow\left|f(0)\right|\le 0\Rightarrow f(0)=0$ ……..……**3** puncte

b) Exemplu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ ……..……..…**2** puncte

c) Din inegalitatea din enunț obținem:

$-2|x| \le f(x) - x^2 \le 2|x|,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 2|x| \le f(x) \le x^2 + 2|x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ……..….**1** punct

Din criteriul cleștelui avem $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Cum $f(0) = 0$ rezultă continuitatea funcției în origine……...**1** punct

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Două lentile având distanţele focale f_1, respectiv f_2 sunt situate la distanţa $d>0$ una faţă de cealaltă; în această situaţie distanţa focală f a sistemului este dată de legea de compoziţie $f=f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$

Considerând legea de compoziţie definită pe $G=(0;+\infty)$, se cere:

a) Să se demonstreze că legea este asociativă.
b) Să se studieze dacă legea admite element neutru.
c) Să se calculeze $\dfrac{d}{2017}\circ\dfrac{d}{2016}\circ...\circ d\circ(2d)\circ(3d)\circ(4d)\circ...\circ(2017d)$.

Soluție:

a) Verifică asociativitatea……..…….…2p
b) Demonstrează că nu există element neutru……..…2p
c) Demonstrează că d este elementul absorbant al legii de compoziţie ($d\circ f_1=d, f_1\circ d=d$). ……..2p
Finalizare.....1p

Problema 2.

Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)$, unde G este primitiva lui g care se anulează în $x=1$.

c) Să se demonstreze : $\int_1^{tgx} f(t)dt+\int_1^{ctgx} g(t)dt=0,\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Soluție:

a) $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{\ln 2}{2}$ 2p

b) Descompune $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ 1p

$G(x)=\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\dfrac{\ln 2}{2}$ 1p

Limita este $\frac{\ln 2}{2}$ 1p

c) Demonstrează relaţia 2p

Problema 3.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Să se demonstreze că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^{x^3} f(t)dt$ este strict crescătoare pe $[0,1]$

c) Să se demonstreze $\int_0^1 f(x)dx\in(1,2)$.

Soluție:

a) $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{e-1}{2}$ 2p

b) $F'(x)=3x^2e^{x^6}$ 2p

$F'(x)>0,\forall x\in(0,1)$, deci F este strict crescătoare pe $[0,1]$ 1p

c) $x^2\le x,\forall x\in[0,1]\Rightarrow e^{x^2}\le e^x,\forall x\in[0,1]\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx\le e-1<2$ 1p

$e^{x^2}\ge 1+x^2\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx\ge\int_0^1(1+x^2)dx=\frac{4}{3}>1$ 1p

Problema 4.

$G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix},k\in\mathbb{Z}\right\}$ şi pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm $H_t=\{A(kt-1)/k\in\mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde " $\cdot$" este înmulţirea matricelor.

a) Să se demonstreze că pentru orice $n,p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

b) Să se demonstreze că, pentru $\forall t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$

c) Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

Soluție:

a) Demonstrează relaţia.....2p

b) Demonstrează că elementul neutru este $A(-1)$.....1p

Demonstrează că $(H_t,\cdot)$ este subgrup.....2p

c) Demonstrează ca funcţia $f:\mathbb{Z}\to G, f(k)=A(k-1)$ este izomorfism.....2p