MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

Problema 1.
Un joc de calculator se desfășoară după regula următoare: la fiecare rundă, jucătorul alege un număr $a\in\mathbb{N}^*$, după care calculatorul alege la întâmplare un număr $x\in\mathbb{R}$ și dacă $\frac{15-3x}{7}\geq a$ sau $x+25\geq a$, atunci jucătorul câștigă a puncte.

a) Stabiliți dacă, pentru $a=12$ și $x=-24$, jucătorul câștigă 12 puncte.
b) Demonstrați că pentru alegerea $a=12$ jucătorul poate să nu câștige 12 puncte.
c) Demonstrați că se pot alege numere $a\in\mathbb{N}$ încât la orice $x\in\mathbb{R}$ ales de calculator, jucătorul să câștige a puncte și aflați numărul maxim de puncte pe care le poate câștiga la o rundă a jocului.

Problema 2.

a) Arătați că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}$, pentru orice număr $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Determinați numerele naturale nenule x și y, care verifică $\frac{1}{x\cdot y}=1-\frac{1}{y}$.

c) Determinați funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ care pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, verifică relația

$$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=1-\frac{1}{f(n)}$$

Problema 3.
Fie triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{BN}=3\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}=3\cdot\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$.

a) Demonstrați că $MN\parallel BC$.
b) Dacă $BM\cap CN=\{Q\}$, demonstrați că A este centrul de greutate al triunghiului QBC și $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{O}$.
c) Demonstrați că triunghiurile QBC și MNP au același centru de greutate.

Problema 4.
Fie mulțimea tuturor funcțiilor de gradul al doilea, $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f_m(x)=x^2+2(m-1)x+(1-4m)$, $m\in\mathbb{R}$ și considerăm familia parabolelor asociate acestor funcții.

a) Arătați că există $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-1;3)$ este pe parabola asociată funcției f_m.
b) Arătați că există un punct situat pe toate parabolele familiei.
c) Considerând reprezentarea tuturor parabolelor familiei pe același sistem ortogonal de coordonate, arătați că există puncte nesituate pe nici una din parabolele familiei și oricare trei astfel de puncte sunt coliniare.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

Problema 1.

Pe un cerc cu raza de $\frac{1}{2\pi}$ metri se deplasează doi melci, notați A și B, plecând în același moment, din același loc și în sensuri diferite. Se știe că în fiecare a n-a secundă de la începutul deplasării lor, melcul A parcurge $\frac{1}{2^n}$ metri în timp ce melcul B parcurge doar $\frac{1}{4^n}$ metri.

a) Arătați că distanța parcursă de melcul A în primele n secunde este egală cu $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ metri.

b) Determinați după câte secunde distanța parcursă de melcul B este egală cu $\frac{3}{8}$ din distanța parcursă de melcul A.

c) Aflați de câte ori se întâlnesc cei doi melci, considerând că după fiecare întâlnire ei își continuă deplasarea după aceleași reguli.

Problema 2.

a) Demonstrați că $4<4\log_7 10<5$.

b) Calculați $\left[\log_3 256\right]$, unde $\left[x\right]$ este partea întreagă a numărului real x.

c) Comparați numerele $a=\log_7 10$ și $b=\log_3 4$.

Problema 3.

Considerăm $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, cu $i^2=-1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$.

b) Demonstrați că pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$ are loc $x^2+xy+y^2=\left|x-\varepsilon y\right|^2$.

c) Dacă $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ și $a=x^2y+y^2z+z^2x$, respectiv $b=xy^2+yz^2+zx^2$, calculați în funcție de a și b expresia $E=\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)$

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ 3^x, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

a) Arătați că $\log_3 2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Arătați că $f\left(\log_3 2\right)\in\mathbb{Q}$

c) Demonstrați că ecuația $f\left(x\right)=3$, $x\in\mathbb{R}$, nu are soluție.

d) Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă și nici surjectivă.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația $\det\left(I_3+xA\right)=0$, în necunoscuta $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $A^2=A+2I_3$.

c) Demonstrați că matricea $B=2A+I_3$ este inversabilă și are inversă matricea $C=\frac{2}{5}A-\frac{3}{5}I_3$.

d) Matricea $B=2A+I_3$ o transformăm în 2017 pași, în felul următor: la fiecare pas, în mod aleator, elementele de pe diagonala principală se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 1 iar toate celelalte elemente se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 3. Aflați dacă este posibil ca după parcurgerea celor 2017 pași matricea B să se transforme într-o matrice cu determinantul egal cu 2017.

Problema 2.

Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}6 & 11\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in M_2\left(\mathbb{R}\right)/\, A\cdot X=X\cdot A\right\}$.

a) Demonstrați că $B\in G$.

b) Dacă $X\in G$, demonstrați că există $x,\ y\in\mathbb{R}$ și X este de forma $\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

c) Matricea $X\in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ verifică egalitatea $X^3-X=A$. Demonstrați că $X\in G$ și determinați toate matricele X cu această proprietate.

Problema 3.

a) Fie $a,\ b,\ c$ numere reale strict pozitive și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$.

Determinați $a,\ b,\ c$ știind că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\frac{1}{4}$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x+\sqrt{4x^2+x+1}$.

Problema 4.

Funcția $f:\left[0;12\right]\to\mathbb{R}$, $f\left(t\right)=\begin{cases}\frac{3t^2-10t+a}{t^2-2t-3}, & t\in\left[0;\,3\right)\\ b-\log_2\left(t-2\right), & t\in\left[3;\,12\right]\end{cases}$, determină temperatura unui corp, măsurată pe timp de 12 ore.

a) Știind că la momentul $t=1$ temperatura corpului este de 1^0 iar la momentul $t=2$ este de 2^0, aflați temperatura corpului la momentul $t=10$.

b) Determinați $a,\ b\in\mathbb{R}$ în cazul în care f are limită în $t=3$.

c) În cazul $a=3$ și $b=2$ arătați că f este continuă pe $\left[0;12\right]$ și determinați intervalele pe care $f\left(t\right)>0$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

Problema 1.

Fie pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi legea de compoziție "$\circ$", dată prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$, $(\forall)\ x,\ y\in\mathbb{Z}$.

a) Verificați $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, $(\forall)\ x,\ y\in\mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că "$\circ$" este comutativă și asociativă.

c) Stabiliți dacă structura $(\mathbb{Z};\circ)$ are element neutru.

d) Dacă $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{4034}$ sunt divizorii întregi ai numărului 2^{2017}, calculați $d_1\circ d_2\circ d_3\ldots\circ d_{4034}$.

Problema 2.

Consumul de energie electrică realizat de familia Popescu, pe durata a 24 ore, este modelat de o funcție $K:[0;24]\to\mathbb{R}_+$, cu $K(0)=0$ și care este derivabilă și verifică $K'(t)=(t+1)e^{1-t}$, $(\forall)t\in[0;24]$, iar $K(t)$ reprezintă cantitatea de energie electrică consumată în intervalul de timp $[0;t]$, exprimat în Kw/h.

a) Demonstrați că $F(t)=-(t+1)\cdot e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$, este primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=t\cdot e^{-t}$.

b) Demonstrați $K(t)=2e-(t+2)\cdot e^{1-t}$, $(\forall)t\in[0;24]$.

c) Verificați că în prima oră familia Popescu consumă mai puțin de $2{,}5\ Kw/h$.

d) Considerând, pe parcursul unei zile, intervalele orare $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, ..., $[23;24]$, arătați că cel mai mare consum de energie electrică se realizează în intervalul orar $[0;1]$.

Problema 3.

Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}/\ a,b\in\mathbb{Z}_6\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

b) Arătați că $(G;+)$ este grup abelian.

c) Calculați suma elementelor mulțimii G.

Problema 4.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

a) Demonstrați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

b) Calculați $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\cdot f(x)}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 1.
Un joc de calculator se desfășoară după regula următoare: la fiecare rundă, jucătorul alege un număr $a\in\mathbb{N}^*$, după care calculatorul alege la întâmplare un număr $x\in\mathbb{R}$ și dacă $\frac{15-3x}{7}\geq a$ sau $x+25\geq a$, atunci jucătorul câștigă a puncte.

a) Stabiliți dacă, pentru $a=12$ și $x=-24$, jucătorul câștigă 12 puncte.
b) Demonstrați că pentru alegerea $a=12$ jucătorul poate să nu câștige 12 puncte.
c) Demonstrați că se pot alege numere $a\in\mathbb{N}$ încât la orice $x\in\mathbb{R}$ ales de calculator, jucătorul să câștige a puncte și aflați numărul maxim de puncte pe care le poate câștiga la o rundă a jocului.

Soluție:

a) Pentru $a=12$ și $x=-24$, $\frac{15-3x}{7}\geq a$ este adevărată și $x+25\geq a$ este falsă 1p
deci jucătorul câștigă 12 puncte. 1p

b) $\frac{15-3x}{7}\geq 12 \Leftrightarrow x\leq -23$ și $x+25\geq a \Leftrightarrow x\geq -13$ 1p
$\Rightarrow x\in\varnothing$ 1p

c) Pentru a câștiga trebuie $x\in\left(-\infty;\frac{15-7a}{3}\right]$ sau $x+25\geq a \Leftrightarrow x\in[a-25;+\infty)$ 1p
$\Rightarrow$ dacă jucătorul alege $a\in\mathbb{N}^*$ încât $\frac{15-7a}{3}\geq a-25 \Leftrightarrow a\leq 9$, atunci câștigă 1p
și dacă alege $a=9$ cîștigă număr maxim de puncte, respectiv 9 puncte 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 2.

a) Arătați că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}$, pentru orice număr $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Determinați numerele naturale nenule x și y, care verifică $\frac{1}{x\cdot y}=1-\frac{1}{y}$.

c) Determinați funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ care pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, verifică relația

$$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+\ldots+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=1-\frac{1}{f(n)}$$

Soluție:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$,

sau demonstrare prin inducție 2p

b) $x=\frac{1}{y-1}\in\mathbb{N}\Rightarrow y-1=1\Rightarrow y=2$ și $x=1$ 2p

c) $n=2\Rightarrow\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}=1-\frac{1}{f(2)}\Rightarrow f(1)=1,\ f(2)=2$ 1p

și din $\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+\ldots+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=1-\frac{1}{f(n)}$ și

$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}\ldots+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=1-\frac{1}{f(n+1)}$, rezultă

$1-\frac{1}{f(n)}+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=1-\frac{1}{f(n+1)}$, deci $f(n+1)=1+f(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ 1p

$\Rightarrow f(n)=n$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 3.

Fie triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{BN}=3\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}=3\cdot\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$.

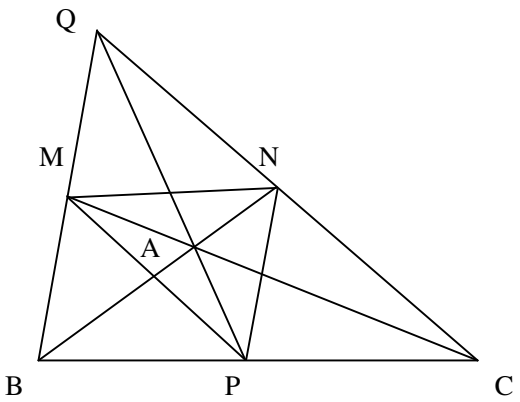
a) Demonstrați că $MN \| BC$.

b) Dacă $BM\cap CN=\{Q\}$, demonstrați că A este centrul de greutate al triunghiului QBC și $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}=\vec{O}$.

c) Demonstrați că triunghiurile QBC și MNP au același centru de greutate.

Soluție:

Conform figurii avem:



a) $\overrightarrow{BN}=3\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}=3\cdot\overrightarrow{AM}\Rightarrow\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MN \| BC$ 3p

b) $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{1}{2}$, $MN \| BC\Rightarrow[MN]$ linie mijlocie în triunghiul $QBC\Rightarrow A$ este centrul de greutate al triunghiului $QBC\Rightarrow\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{O}$ 2p

c) Având A centrul de greutate al triunghiului QBC,

$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\left(-\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{O}\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ este centrul de greutate și al triunghiului MNP 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 4.

Fie mulțimea tuturor funcțiilor de gradul al doilea, $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f_m(x)=x^2+2(m-1)x+(1-4m)$, $m\in\mathbb{R}$ și considerăm familia parabolelor asociate acestor funcții.

a) Arătați că există $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-1;3)$ este pe parabola asociată funcției f_m.

b) Arătați că există un punct situat pe toate parabolele familiei.

c) Arătați că punctul $B(2;3)$ nu este situat pe nici una din parabolele familiei și determinați mulțimea tuturor punctelor cu acestă proprietate.

Soluție:

a) $f_m(-1)=3$ 1p

$\Rightarrow (-1)^2+2(m-1)\cdot(-1)+(1-4m)=3 \Rightarrow m=\frac{1}{6}$ 1p

b) $P(a;b)$ este pe toate parabolele $\Leftrightarrow f_m(a)=b$, $(\forall)m\in\mathbb{R}$ 1p

$\Leftrightarrow a^2-2a+1-b=2m(2-a)$, $(\forall)m\in\mathbb{R}$ 1p

$\Rightarrow a=2$, $b=1$ și $P(2;1)$ este pe toate parabolele 1p

c) $B(2;3)\in G(f_m) \Leftrightarrow f_m(2)=3 \Leftrightarrow 1=3$, contradicție, deci $B(2;3)$ nu este pe nici una din parabole 1p

$M(x_0;y_0)\in G(f_m) \Leftrightarrow f_m(x_0)=y_0 \Leftrightarrow 2m(x_0-2)=y_0-x_0^2+2x_0-1$,

deci dacă $x_0\neq 2$, alegând pentru $m\in\mathbb{R}$ valoarea $m=\frac{y_0-x_0^2+2x_0-1}{2(x_0-2)}$, obținem $M(x_0;y_0)\in G(f_m)$.

Pentru $x_0=2$ avem punctul $P(2;1)$ care este pe toate parabolele familiei și atunci punctele nesituate pe nici o parabolă a familiei sunt punctele $Q(2;y)$ cu $y\neq 1$, aceasta deoarece având $f_m(2)=1$, vom avea $f_m(2)\neq y$ pentru orice $y\neq 1$.

Punctele $Q(2;y)$ cu $y\neq 1$ descriu dreapta de ecuație $x=2$ din care se exclude punctul $P(2;1)$. 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 1.

Pe un cerc cu raza de $\frac{1}{2\pi}$ metri se deplasează doi melci, notați A și B, plecând în același moment, din același loc și în sensuri diferite. Se știe că în fiecare a n-a secundă de la începutul deplasării lor, melcul A parcurge $\frac{1}{2^n}$ metri în timp ce melcul B parcurge doar $\frac{1}{4^n}$ metri.

a) Arătați că distanța parcursă de melcul A în primele n secunde este egală cu $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ metri.

b) Determinați după câte secunde distanța parcursă de melcul B este egală cu $\frac{3}{8}$ din distanța parcursă de melcul A.

c) Aflați de câte ori se întâlnesc cei doi melci, considerând că după fiecare întâlnire ei își continuă deplasarea după aceleași reguli.

Soluție:

a) Notăm $S_n(A)$ distanța parcursă de melcul A în n secunde, respectiv $S_n(B)$ distanța parcursă de melcul B în aceleași n secunde și obținem:

$S_n(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ 2p

b) $S_n(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ 1p

$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ 1p

$2^n=8$, $n=3$ 1p

c) Cercul traiectoriei are lungimea de 1 metru și se observă $S_n(A)<1$, $S_n(B)<1$ 1p

deci nici unul din melci nu parcurge întreg cercul.

Cum $S_2(A)+S_2(B)>1$, melcii se întâlnesc o singură dată 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 2.

a) Demonstrați că $4 < 4\log_7 10 < 5$.

b) Calculați $\left[\log_3 256\right]$, unde $\left[x\right]$ este partea întreagă a numărului real x.

c) Comparați numerele $a = \log_7 10$ și $b = \log_3 4$.

Soluție:

a) $4 < 4\log_7 10 \Leftrightarrow \log_7 7 < \log_7 10$ (A) 1p

$4\log_7 10 < 5 \Leftrightarrow \log_7 10^4 < \log_7 7^5 \Leftrightarrow 10.000 < 16.807$ (A) 1p

b) $3^5 < 256 < 3^6 \Rightarrow 5 < \log_3 256 < 6 \Rightarrow \left[\log_3 256\right] = 5$ 3p

c) $4a = 4\log_7 10 \in (4; 5)$ și $4b = \log_3 256 \in (5;6) \Rightarrow a < b$ 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 3.

Considerăm $\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, cu $i^2 = -1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$.

b) Demonstrați că pentru orice $x,\ y \in \mathbb{R}$ are loc $x^2 + xy + y^2 = \left|x - \varepsilon y\right|^2$.

c) Dacă $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ și $a = x^2y + y^2z + z^2x$, respectiv $b = xy^2 + yz^2 + zx^2$, calculați în funcție de a și b expresia $E = \left(x^3 - y^3\right)\left(y^3 - z^3\right)\left(z^3 - x^3\right)$

Soluție:

a) Calcul direct sau folosind $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = -1$ și $\varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1$

$\Rightarrow \varepsilon$ și $\bar{\varepsilon}$ verifică ecuația $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ 1p

apoi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 1 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1$ 1p

b) Calcul direct $\left|x - \varepsilon y\right|^2 = \left|\left(x + \dfrac{y}{2}\right) - \dfrac{y\sqrt{3}}{2} \cdot i\right|^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} = x^2 + xy + y^2$

sau $\left|x - \varepsilon y\right|^2 = \left(x - \varepsilon y\right) \cdot \overline{\left(x - \varepsilon y\right)} = \left(x - \varepsilon y\right) \cdot \left(x - \bar{\varepsilon} y\right) = x^2 + xy + y^2$ 2p

c) $x^3 - y^3 = \left(x - y\right)\left(x^2 + xy + y^2\right)$ și analogele 1p

$E = \left(x - y\right)\left(y - z\right)\left(z - x\right)\left(x^2 + xy + y^2\right)\left(y^2 + yz + z^2\right)\left(z^2 + zx + x^2\right) = A \cdot B$

$A = \left(x - y\right)\left(y - z\right)\left(z - x\right) = b - a$ 1p

$B = \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(y^2 + yz + z^2\right)\left(z^2 + zx + x^2\right) = \left|\left(x - \varepsilon y\right)\left(y - \varepsilon z\right)\left(z - \varepsilon x\right)\right|^2 = \left|-\varepsilon\left(a - \varepsilon b\right)\right|^2 = a^2 + ab + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \left(b - a\right)\left(a^2 + ab + b^2\right) = b^3 - a^3$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ 3^x, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

a) Arătați că $\log_3 2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Arătați că $f(\log_3 2)\in\mathbb{Q}$

c) Demonstrați că ecuația $f(x)=3$, $x\in\mathbb{R}$, nu are soluție.

d) Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă și nici surjectivă.

Soluție:

a) Dacă $\log_3 2=n\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2=3^n$ iar dacă $\log_3 2=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}\Rightarrow 2^q=3^p$ (număr par = număr impar!) 1p

b) $f(\log_3 2)=3^{\log_3 2}=2$ 2p

c) Dacă $x\in\mathbb{Q}\Rightarrow f(x)=3\Leftrightarrow 2^x=3\Leftrightarrow x=\frac{1}{\log_3 2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ contradicție 1p

Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow f(x)=3\Leftrightarrow 3^x=3\Leftrightarrow x=1\in\mathbb{Q}$ contradicție 1p

d) $f(1)=2=f(\log_3 2)\Rightarrow$ funcție neinjectivă 1p

$f(x)\neq 3$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ funcție nesurjectivă 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 1.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația $\det(I_3+xA)=0$, în necunoscuta $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $A^2=A+2I_3$.

c) Demonstrați că matricea B, cu $B=2A+I_3$, este inversabilă și are inversă matricea $C=\frac{2}{5}A-\frac{3}{5}I_3$.

d) Matricea $B=2A+I_3$ o transformăm în 2017 pași, în felul următor: la fiecare pas, în mod aleator, elementele de pe diagonala principală se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 1 iar toate celelalte elemente se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 3. Aflați dacă este posibil ca după parcurgerea celor 2017 pași matricea B să se transforme într-o matrice cu determinantul egal cu 2017.

Soluție:

a) $\det(I_3+xA)=\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=(2x+1)\cdot\begin{vmatrix}1&x&x\\1&1&x\\1&x&1\end{vmatrix}=(2x+1)(x-1)^2$

$\Rightarrow \det(I_3+xA)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$ 2p

b) $A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=A+2I_3$ 1p

c) $\det(2A+I_3)=5\neq 0 \Rightarrow B$ este inversabilă 1p

$(2A+I_3)\left(\frac{2}{5}A-\frac{3}{5}I_3\right)=I_3$, deci $B^{-1}=C$ 1p

d) După 2017 pași matricea B ce transformă într-o matrice M de forma $M=\begin{pmatrix}p_1&q_1&q_2\\q_3&p_2&q_4\\q_5&q_6&p_3\end{pmatrix}$ cu termenii de pe diagonala principală pari și ceilalți termeni impari 1p

$\Rightarrow \det M=$ *număr par* $\neq 2017$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 2.

Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}6 & 11\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbb{R})/\, A\cdot X=X\cdot A\right\}$.:

a) Demonstrați că $B\in G$.

b) Dacă $X\in G$, demonstrați că există $x,\ y\in\mathbb{R}$ și X este de forma: $\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

c) Matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică egalitatea $X^3-X=A$. Demonstrați că $X\in G$ și determinați toate matricele X cu această proprietate.

Soluție:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}12 & 28\\ 0 & 12\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}12 & 28\\ 0 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow\ A\cdot B=B\cdot A\ \Rightarrow\ B\in G$ 2p

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G\ \Rightarrow\ A\cdot X=X\cdot A$ 1p

și se obține $\begin{pmatrix}6a+11c & 6b+11d\\ 6c & 6d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6a & 11a+6b\\ 6c & 11c+6d\end{pmatrix}$ 1p

din care $c=0$, $a=d\ \Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ 1p

c) Dacă $X^3-X=A$, cum $\left(X^3-X\right)\cdot X=X\cdot\left(X^3-X\right)\ \Rightarrow\ A\cdot X=X\cdot A\ \Rightarrow\ X\in G$,

deci X este de forma $X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$, $x,\ y\in\mathbb{R}$ 1p

$X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x^3-x & 3x^2y-y\\ 0 & x^3-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 11\\ 0 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\ x^3-x=6,\ y\left(3x^2-1\right)=11$

$\Rightarrow\ x=2,\ y=1\ \Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 3.

a) Fie a, b, c numere reale strict pozitive și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$.

Determinați a, b, c știind că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\dfrac{1}{4}$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x+1}$.

Soluție:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a+\sqrt{b}\ \Rightarrow\ a+\sqrt{b}=4$ 1p

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{bx^2-cx+1}-ax\right)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ limită finită $\Leftrightarrow\ \sqrt{b}=a\ \Rightarrow\ a=2,\ b=4$ 1p

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-cx+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-cx+1}{\sqrt{4x^2-cx+1}+2x}=-\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ c=1$ 1p

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x+1}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, $\Rightarrow$ nu are asimptote verticale 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=4$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-4x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)=\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ y=4x+\dfrac{1}{4}$ asimptotă la $+\infty$ 2p

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x}=-\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ y=-\dfrac{1}{4}$ asimptotă la $-\infty$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 4.

Funcția $f:[0;12]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}\dfrac{3t^2-10t+a}{t^2-2t-3}, & t\in[0;3)\\ b-\log_2(t-2), & t\in[3;12]\end{cases}$, determină temperatura unui corp, măsurată pe timp de 12 ore.

a) Știind că la momentul $t=1$ temperatura corpului este de 1^0 iar la momentul $t=2$ este de 2^0, aflați temperatura corpului la momentul $t=10$.

b) Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ în cazul în care f are limită în $t=3$.

c) În cazul $a=3$ și $b=2$ arătați că f este continuă pe $[0;12]$ și determinați intervalele pe care $f(t)>0$.

Soluție:

a) $f(1)=1$, $f(3)=2 \Rightarrow a=3$, $b=2$ 1p

$f(10)=-1$ 1p

b) $l_s=\lim\limits_{\substack{t\to 3\\ t<3}}\dfrac{3t^2-10t+a}{t^2-2t-3}=-\infty\cdot(a-3)$, $l_d=b$, $l_s=l_d \Rightarrow a=3$ 2p

pentru $a=3 \Rightarrow l_s=\lim\limits_{\substack{t\to 3\\ t<3}}\dfrac{3t^2-10t+3}{t^2-2t-3}=\lim\limits_{\substack{t\to 3\\ t<3}}\dfrac{(t-3)(3t-1)}{(t-3)(t+1)}=2$, $l_d=b \Rightarrow b=2$ 1p

c) $f:[0;12]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}\dfrac{3t^2-10t+3}{t^2-2t-3}, & t\in[0;3)\\ 2-\log_2(t-2), & t\in[3;12]\end{cases}$, este continuă pe $[0;12]\setminus\{3\}$

iar în $x=3$, având $l_s=l_d=f(3) \Rightarrow f$ continuă pe $[0;12]$ 1p

$f(t)=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$, $t=6$

t	0		$\frac{1}{3}$		6		12
$f(t)$	− − − − − − −	0	+ + + + + + + + +	0	− − − − − − −		−

$\Rightarrow t\in\left(\dfrac{1}{3};6\right)$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 1.

Fie pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi legea de compoziție "$\circ$", dată prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$, $(\forall)\ x,\ y\in\mathbb{Z}$.

a) Verificați $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, $(\forall)\ x,\ y\in\mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că "$\circ$" este comutativă și asociativă.

c) Stabiliți dacă structura $(\mathbb{Z};\circ)$ are element neutru.

d) Dacă $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{4034}$ sunt divizorii întregi ai numărului 2^{2017}, calculați $d_1\circ d_2\circ d_3\ \ldots\circ d_{4034}$.

Soluție:

a) $3(x+1)(y+1)-1=(3x+3)(y+1)-1=3xy+3x+3y+3-1=3xy+3x+3y+2=x\circ y$ 1p

b) Demonstrație pentru comutativitate 1p
Demonstrație pentru asociativitate 2p

c) Presupunând element neutru $e\in\mathbb{Z}$ se deduce $e=-\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ (\mathbb{Z};\circ)$ nu are element neutru 2p

d) Cum $x\circ(-1)=-1$ și $(-1)\circ y=-1$, $(\forall)x,\ y\in\mathbb{Z}$
și $(\mathbb{Z};\circ)$ este asociativă iar $d=-1$ este divizor al lui $2^{2017}\ \Rightarrow\ d_1\circ d_2\circ d_3\ \ldots\circ d_{4034}=-1$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 2.

Consumul de energie electrică realizat de familia Popescu, pe durata a 24 ore, este modelat de o funcție $K:[0;\,24]\to\mathbb{R}_+$, cu $K(0)=0$ și care este derivabilă și verifică $K'(t)=(t+1)e^{1-t}$, $(\forall)t\in[0;\,24]$, iar $K(t)$ reprezintă cantitatea de energie electrică consumată în intervalul de timp $[0;\,t]$, exprimat în Kw/h.

a) Demonstrați că $F(t)=-(t+1)\cdot e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$, este primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=t\cdot e^{-t}$.

b) Demonstrați $K(t)=2e-(t+2)\cdot e^{1-t}$, $(\forall)t\in[0;\,24]$.

c) Verificați că în prima oră familia Popescu consumă mai puțin de $2{,}5\ Kw/h$.

d) Considerând, pe parcursul unei zile, intervalele orare $[0;\,1]$, $[1;\,2]$, $[2;\,3]$, ..., $[23;\,24]$, arătați că cel mai mare consum de energie electrică se realizează în intervalul orar $[0;\,1]$.

Soluție:

a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(t)=f(t)$, $(\forall)t\in\mathbb{R}$ 1p

b) $K(t)=\int(t+1)e^{1-t}dt=-(t+2)e^{1-t}+C$ 2p

$K(0)=0\ \Rightarrow\ C=2e$ 1p

c) $K(1)=2e-3<2\cdot 2{,}72-3<2{,}5$ 1p

d) Consumul în a n-a oră, $n\geq 2$, este $g(n)=K(n)-K(n-1)=e^{1-n}\left((n+1)e-n-2\right)$ 1p

Se arată că $g(n)<g(n-1)$, $n\geq 2$ este echivalent cu $n(e-1)>2$,

inegalitate confirmată de $n\geq 2$ și $e-1>1$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 3.

Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{Z}_6\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

b) Arătați că $(G;+)$ este grup abelian.

c) Calculați suma elementelor mulțimii G.

Soluție:

a) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$.

Cum $a \in \mathbb{Z}_6$ poate fi ales în 6 moduri și $b \in \mathbb{Z}_6$ tot în 6 moduri, G are 36 de elemente 2p

b) Se arată cu ușurință că pentru orice $A, B \in G \Rightarrow A+B \in G$ și $(G;+)$ este structură comutativă și asociativă, cu element neutru $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ iar fiecare $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ are simetrică $-A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in G$ 3p

c) Matricele $X \in G$ cu proprietatea $X=-X$ sunt $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu $a \in \{\hat{0}; \hat{3}\}$ și $b \in \{\hat{0}; \hat{3}\}$ și suma lor este matricea $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Celelalte matrice X din G se asociază fiecare cu simetrica $-X$ și cum fiecare matrice este simetrică doar unei singure matrice, suma elementelor mulțimii G este $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 4.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

a) Demonstrați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

b) Calculați $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\cdot f(x)}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$

Soluție:

a) $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1 (x^2+4)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_0^1=\frac{13}{3}$ 2p

b) Notăm $\sqrt{x^2+4}=t \Rightarrow x^2+4=t^2 \Rightarrow xdx=tdt$

$x=\sqrt{5} \Rightarrow t=3$, $x=2\sqrt{3} \Rightarrow t=4$

$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\cdot f(x)}=\int_3^4 \frac{t\,dt}{(t^2-4)\cdot t}=\int_3^4 \frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right)\Big|_3^4=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$ 3p

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt}{x^4}$, cu nedeterminare $\frac{0}{0}$

și cum funcția de integrat, $g(t)=t^3\sqrt{t^2+4}$, este primitivabilă, considerând o primitivă $G\in\int g(t)\,dt$

avem $\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt=G(x)-G(0)$ 1p

și atunci

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x^4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{G'(x)}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sqrt{x^2+4}}{4x^3}=\frac{1}{2}$ 1p