INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAȚIEI
NAȚIONALE ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 5 martie 2016

FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII

SUBIECTE - clasa a IX-a

1. a) Demonstrați că $x^2+3xy+4y^2 \geq 0$, oricar ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
b) Rezolvați ecuația $\left[\frac{x}{3}\right] = x-2$.

2. a) Demonstrați că numărul $A = 2016^n - 1$ se didide cu 2015, $(\forall) n \in \mathbb{N}$;
b) Mulțimea $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^*$ se numește „aritmetică" dacă unul dintre elementele ei este media aritmetică a celorlalte două. Considerăm mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots \ldots, 9\}$. Determinați numărul de submulțimi „aritmetice" ale mulțimii M.

3. Asupra unui punct material acționează două forțe $\overrightarrow{F_1}$ și $\overrightarrow{F_2}$, având modulele $2N$, respectiv $2\sqrt{3}N$. Știind că modulul forței rezultante $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ este $4N$, determinați măsura unghiului dintre forțele $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ și $\overrightarrow{F_1}-\overrightarrow{F_2}$.

4. Se consideră triunghiul *ABC* cu măsura unghiului *A* egală cu 90° și măsura unghiului *C* egală cu 30°. Fie $D \in (BC)$ și $P \in (AB)$, astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$, $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$, iar *E* este piciorul bisectoarei din *B*. Demonstrați că dreptele *CP*, *AD* și *BE* sunt concurente.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAȚIEI
NAȚIONALE ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 5 martie 2016
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a X-a

1. Se dau numerele reale $x = \sqrt{m + \sqrt{m^2 - k^2}}$ și $y = \sqrt{m - \sqrt{m^2 - k^2}}$, unde $m, k \in \mathbb{N}^*$, $m > k$. Demonstrați că:

a) $xy \in \mathbb{N}^*$;

b) $k \cdot \frac{x}{y} - \sqrt{m^2 - k^2} \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, arătați că $|a\ sinx + b\ cosx| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$;

b) Arătați că $2^{sinx} \cdot 3^{cosx} < 4$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

3. Rezolvați ecuația: $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$.

4. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$, atunci $|z| = 1$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 5 martie 2016
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Se dau matricele $= \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{N})$. Câte astfel de matrice au proprietatea că, atât suma elementelor de pe diagonala principală, cât și suma elmentelor de pe diagonala secundară, sunt egale cu 5?

2. Fie $A \in M_3(\mathbb{C})$ o matrice, A^t transpusa sa, iar $B = A - A^t \in M_3(\mathbb{C})$.
a) Arătați că $B = -B^t$;
b) Demonstrați că $detB = 0$.

3. Se dă funcția $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$. Se cere:
a) Să se determine domeniul maxim de definiție, *D* al funcției f;
b) Să se studieze continuitatea funcției f pe *D*.

4. a) Calculați: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\left(x^2+4x-4\right)}{x-1}$;

b) Determinați asimptotele funcției: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right), & x>0 \\ 1\ , & x=0 \\ x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right), & x<0 \end{cases}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAȚIEI
NAȚIONALE ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 5 martie 2016
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XII-a

1. a) Să se arate că $\int_x^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1}dt$, $(\forall)x > 0$;

b) Știind că $arctgx + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $(\forall)x > 0$, să se calculeze $I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctgx}{x}dx$, $a > 1$.

2. Se dau funcțiile $f, F: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ și $(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left[1-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

a) Arătați că *F* este o primitivă a lui f;

b) Calculați $I = \int_1^e f(x)\cdot F(x)dx$.

3. Pe $G = (-1, \infty)$ se definește legea de compoziție internă dată prin $* \; y = x + y + xy$, $(\forall)x, y \in G$.

a) Arătați că legea e asociativă și are element neutru;

b) Rezolvați în G ecuația $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ n\ ori} = 1$, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

4. Fie $G = \left\{A(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$ un grup în raport cu înmulțirea matricelor. Arătați că $(G, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Barem - cl. a IX-a - Științe

1. a) $x^2+3xy+4y^2 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{3y}{2}+\frac{9y^2}{4}-\frac{9y^2}{4}+4y^2 =$

$= \left(x+\frac{3y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4} \geq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ (3p)

b) $x-2\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ (1p)

$x-2\leq\frac{x}{3}<x-2+1$ (1p)

$\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{2},3\right]$ (1p)

finalizare $x\in\{2,3\}$ (1p)

2. a) dem. prin inducție

$P(1)$, pp. $P(k)$ A (1p)

calc. $P(k+1)$ și dem. (1p)

finalizare (1p)

b) scrie o submulțime de forma $\{a, a+r, a+2r\}$

discuții pe cazuri $a+2r\leq 9$ (1p)

$r=1 \Rightarrow a\leq 7 \Rightarrow$ 7 submulțimi

$r=2 \Rightarrow a\leq 5 \Rightarrow$ 5 submult.

$r=3 \Rightarrow$ 3 submult.

$r=4 \Rightarrow$ 1 submult. (2p)

finalizare: $7+5+3+1 = 16$ submulțimi (1p)

3. desen (1p)

def. mărimi $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ (2p)

def. $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ și $\vec{F}_1-\vec{F}_2$ (2p)

calc. $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$ (1p)

finalizare $\alpha = 120^\circ$ (1p)

4. desen corect (1p)

scrie teor. bisect. $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$ (1p)

justifică $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ (1p)

calculează produsul $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$ (2p)

aplică R.T. Ceva și finalizează (2p)

1. a) $xy = \sqrt{m+\sqrt{m^2-k^2}} \cdot \sqrt{m-\sqrt{m^2-k^2}} = \sqrt{m^2-(m^2-k^2)} =$

$= \sqrt{k^2} = k \quad \in \mathbb{N}^*$ (3p)

b) $\frac{x}{y} = \frac{m+\sqrt{m^2+k^2}}{k}$ (2p)

$k \cdot \frac{x}{y} - \sqrt{m^2+k^2} = m \quad \in \mathbb{N}^*$ (2p)

2. a) $a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x \leq a^2+b^2$ (1p)

$a^2 \cos^2 x - 2ab \sin x \cos x + b^2 \sin^2 x \geq 0$ (1p)

$(a \cos x - b \sin x)^2 \geq 0$ (1p)

b) Se logaritmează în baza 2 și se arată că

$\sin x + \cos x \cdot \log_2 3 < 2$ (2p)

cf. a) $\Rightarrow |\sin x + \cos x \log_2 3| \leq \sqrt{1+(\log_2 3)^2} < 2$ (2p)

3. $\frac{(2^x+3^x)(4^x-6^x+9^x)}{6^x(2^x+3^x)} = \frac{7}{6}$ (2p)

$\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{7}{6}$ (2p)

$t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}, \quad t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$

$6t^2 - 13t + 6 = 0$ (2p)

$t_1 = \frac{2}{3}, \quad t_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = -1$ (1p)

4. $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = \frac{1+\bar{z}+\bar{z}^2}{1-\bar{z}+\bar{z}^2}$ (2p)

$2z - 2\bar{z} + 2z\cdot\bar{z}^2 - 2z^2\cdot\bar{z} = 0 \quad /:2$

$(z-\bar{z})(2\bar{z}-1) = 0$ (3p)

$z - \bar{z} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$

$z\cdot\bar{z} = 1$ (1p)

$|z| = 1$ (1p)

Barem - cl. XI-a - Științe

1. $a+c+e = b+c+d \Rightarrow a+e = b+d$ (1p)

pt. $c=0 \Rightarrow a+e=5$ și $b+d=5$

perechile (a,e) și (b,d) pot fi alese fiecare

în câte 6 moduri $\Rightarrow 6\cdot 6 = 6^2$ moduri (3p)

pt. $c=1 \Rightarrow a+e=b+d=4 \Rightarrow 5^2$ moduri

- - - -

$c=5 \Rightarrow a=e=b=d=0$ (2p)

În total: $6^2+5^2+\ldots+1$ matrici (1p)

2. a) se dem. prin calcul (4p)

b) calcul și finalizare (3p)

3. a) explicitare de modul (1p)

condiții de existență (1p)

$D=[0,4]$ (1p)

b)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{4-x}}, & x\in[0,2)\\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}, & x\in[2,4]\end{cases}$$ (2p)

limite laterale, $f(2)$ (1p)

finalizare (1p)

4. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+x^2+4x-5)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1)(x+5))}{(x-1)(x+5)}(x+5)$ (2p)

finalizare (1p)

b) $y=1$ A.O. spre $+\infty$ (2p) și $y=\ln 3$ A.O. spre $-\infty$ (2p)

Haineovici - 2016

Barem - cl. a XII-a - Tehnic și servicii

1. a) 9 (2p)

b) Inj. fct. f (2p)

arată că $f(x*y) = f(x) \circ f(y)$ (2p)

finalizare (1p)

2. a) $J = \frac{x^2}{2} + x + \ln x + C$ (3p)

b) alegere condiții $f(x) = x$ și $g'(x) = e^x$ (1p)

calc. $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ (1p)

$\int_0^1 h(x)\,dx = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1$ (2p)

3. a) verificare $x \circ y \in M$ (3p)

b) $x \circ p = xp - 4x - 4p + 20 = p$ (2p)

$p = 4$ (2p)

4. a) $F'(x) = f(x)$ (2p)

b) $J = \int_1^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)' dt$ (3p)

$J = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{x-1}{x} - 2$ (2p)