INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

CLASA A IX-A

1. Fie funcția $f:\square \to \square$, $f(x)=\begin{cases} x-2, \text{ dacă } x\geq 2 \\ 2x+3, \text{ dacă } x<2 \end{cases}$.

a) Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate și să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele de intersecție al graficului cu axele de coordonate ale sistemului de axe de coordonate cartezian xOy.

c) Să se calculeze: $E=(f(2)+f(3)+...+f(n)):(f(-1)+f(-2)+...+f(-n))$.

2. Să se rezolve triunghiul ABC știind că măsurile unghiurilor sunt în progresie aritmetică și $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, iar latura cea mai lungă este de 6 cm.

3. Fie cercul $\mathfrak{C}(O,1)$ de centru O și rază R=1 și punctul $A(1,0)\in\mathfrak{C}(O,1)$. Un punct M de pe cercul $\mathfrak{C}$ are o mișcare uniformă în sens direct trigonometric. Spunem că mișcarea este uniformă dacă în intervale de timp egale, punctul parcurge arce de cerc de lungimi egale. La momentul inițial t=0, punctul M coincide cu punctul A. În timp de o secundă, punctul M parcurge pe cerc un arc AM astfel încât $m(\square(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}))=\frac{\pi}{9}$.

a) După cât timp, de la punerea în mișcare, punctul M trece prima dată prin punctul A?

b) Indicați pe un desen care va fi poziția punctului M după 90 de secunde. Dar după 3 minute?

c) Fie $B\in\mathfrak{C}(O,1)$, astfel încât $m(\square(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}))=\frac{3\pi}{2}$. Indicați după cât timp punctul M trece prima dată prin punctul B. În ce alte momente t punctul M trece din nou prin punctul B.

4. Doi fizicieni testează o minirachetă, lansând-o de la sol. Se notează înălțimea cu $h(t)$ (în metri) și timpul cu t (în secunde). Fizicienii estimează că înălțimea pe care o va atinge miniracheta, în funcție de timp, este dată de relația $h(t)=-5t^2+100t$.

a) La cât timp de la lansare miniracheta ajunge din nou la sol?

b) Demonstrați că funcția h este strict crescătoare pe intervalul $[0,10]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[10,20]$.

c) Care este înălțimea maximă pe care o poate atinge miniracheta?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

4. Fie binomul $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, cu suma coeficienților binomiali egală cu 256. Să se determine:

d) Termenul dezvoltării care nu îl conține pe x.
e) Termenul din mijloc al dezvoltării.
f) Termenul dezvoltării care îl conține pe x^2.

5. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(a,1), B(-1,b), C(2,3)$ și $D(3,2)$, unde a,b sunt numere reale.

a) Să se determine numărul real a, știind că aria triunghiului *ACD* este egală cu 10 u.a.
b) Să se determine numărul real b, știind că distanța de la punctul *B* la dreapta *CD* este egală cu $\sqrt{2}$.
c) Stabiliți o relație între *a* și *b* astfel încât dreptele *AB* și *CD* să fie paralele.

6. Un agent de închirieri propune pentru inchirierea unei mașini pentru o zi două tipuri de contracte:
-primul tip: 200 de lei și încă 1 leu pentru fiecare kilometru parcurs;
-al doilea tip: 100 de lei și încă 1,5 lei pentru fiecare kilometru parcurs.
Se notează cu $f_1(x)$ prețul pentru *x* kilometri parcurși în cazul încheierii unui contract de primul tip, iar cu $f_2(x)$ prețul pentru *x* kilometri parcurși în cazul încheierii unui contract de al doilea tip.

d) Scrieți expresiile pentru funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$. Reprezentați grafic, în același reper cartezian *xOy*, funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$, pentru $x\in[0,500]$
e) Indicați, utilizând graficul, tipul de contract mai avantajos în funcție de numărul de kilometri parcurși.
f) Găsiți și precizați rezultatele de la punctul b) prin calcul.

4. Într-o urnă sunt bile mari și bile mici. Aceste bile sunt albe și negre. Știm că sunt 5 bile mari și 4 bile mici, din care 6 bile sunt albe și 3 bile sunt negre.

a) Știind că 3 bile sunt în același timp albe și mari determinați:
-numărul de bile mici și negre;
-numărul bilelor mari și negre;
-numărul bilelor mici și albe.
b) Dacă extragem, la întâmplare o bilă din urnă, calculați probabilitatea ca aceasta să fie:
-albă și mică;
-albă;
-mică;
-albă sau mică.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

7. Unui muncitor i s-a mărit salariul în ultimii 3 ani de două ori: o dată cu 48% și a doua oară cu 10%. După a doua mărire primește cu 753,60 lei pe lună mai mult decât înainte de prima mărire.
g) Aflați cât primea muncitorul înainte de fiecare mărire.
h) Aflați cât la sută primește acum, în plus, față de acum trei ani.
i) Aflați cât la sută reprezintă a doua mărire din prima mărire.

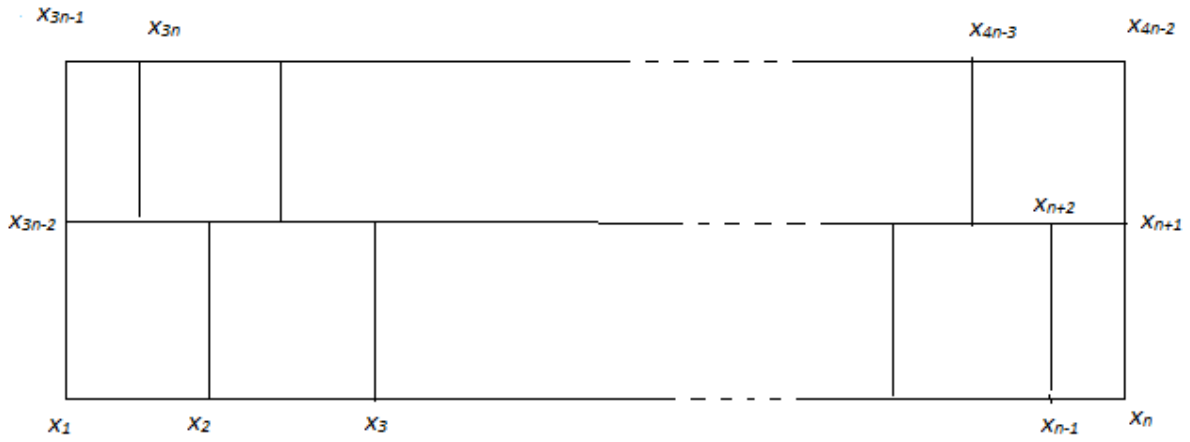
8. În tabelul de mai jos este prezentată distribuția unor piese după diametrul lor:

Mărimea diametrului (mm)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)
Frecvența absolută	10	15	12	15	8

a) Trasați poligonul frecvențelor.
b) Calculați valoarea medie a diametrelor pieselor.
c) Știind că diametrul pieselor din fiecare clasă crește uniform, să se afle diametrul celei de-a 30-a piese.

9. a) Fie graful G cu vârfurile $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \geq 5$. Determinați numărul minim și numărul maxim de muchii astfel încât graful să aibă două puncte izolate.
b) Într-o tabără sunt 25 de elevi. Doi elevi sunt în relație de prietenie dacă ei se respect reciproc. Să se determine numărul minim și numărul maxim de relații de prietenie astfel încât exact 3 elevi să nu aibă prieteni.

4. Se consideră graful cu $4n-2$ vârfuri:



Să se arate că numărul muchiilor este de forma $6k+1, k \in \mathbb{N}^*$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = (x+4)(y+4)-4, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că operația este asociativă.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$.

c) Să se calculeze: $(-2014) \circ (-2013) \circ ... \circ 2013 \circ 2014$.

2. În reperul cartezian *xOy*, se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n), n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Să se determine ecuația dreptei A_2A_3.

c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A_{2013}, A_{2014}, A_{2015}$.

3. Un elev își alege o matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. Prietenul său alege o altă matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$, având grijă ca aceasta să comute cu matricea A($A \cdot B = B \cdot A$), dar astfel încât pătratele celor două matrice să coincidă. Demonstrați că suma celor două matrice este o matrice singulară.

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 5×6 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și din fiecare coloană formează progresii aritmetice, în ordinea în care sunt scrise. Suma celor patru numere scrise în colțurile tablei este egală cu $\frac{4028}{15}$. Să se afle suma tuturor numerelor de pe tablă.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

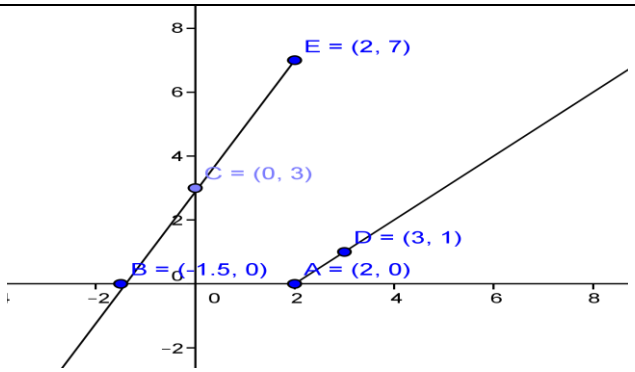
1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-2, & \text{dacă } x\geq 2\\ 2x+3, & \text{dacă } x<2\end{cases}$.

a) Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate și să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele de intersecție al graficului cu axele de coordonate ale sistemului de axe de coordonate cartezian xOy.

c) Să se calculeze: $E=(f(2)+f(3)+...+f(n)):(f(-1)+f(-2)+...+f(-n))$.

Soluție

a)	$G_f\cap(Ox)$: $\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2, A(2,0)\\ 2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}, B(-\frac{3}{2},0)\end{cases}$ $G_f\cap(Ox)$: $f(0)=3\Rightarrow C(0,3)$	1p 1p
		2p
b)	$A_{\Delta ABC}=\frac{BA*OC}{2}=\frac{21}{4}$	1p
c)	$f(2)+f(3)+...+f(n)=\frac{n^2-3n+2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ $f(-1)+f(-2)+...+f(-n)=-n^2+2n=-n(n-2)$ $E=(f(2)+f(3)+...+f(n)):(f(-1)+f(-2)+...+f(-n))=\frac{1-n}{2n}$	2p

2. Să se rezolve triunghiul ABC știind că măsurile unghiurilor sunt în progresie aritmetică și $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, iar latura cea mai lungă este de 6 cm.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

	Soluție Notăm cu α măsura unghiului B. Atunci $\alpha-r,\alpha,\alpha+r$ sunt măsurile celor trei unghiuri.	1p
	$\alpha-r+\alpha+\alpha+r=180^\circ \Rightarrow \alpha=60^\circ$ $m(\sphericalangle B)=60^\circ$	1p
	Din egalitatea dată avem: $\sin(60^\circ+r)+\sin(60^\circ-r)=\frac{3}{2}$ $2\sin 60^\circ \cos r=\frac{3}{2}\Rightarrow \cos r=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow r=30^\circ$	2p
	Unghiurile triunghiului ABC sunt: $m(\sphericalangle A)=30^\circ, m(\sphericalangle B)=60^\circ, m(\sphericalangle C)=90^\circ$.	1p
	Asadar triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza AB= 6 cm $\Rightarrow BC=\frac{AB}{2}=\frac{6}{2}=3$ cm	1p
	Din teorema lui Pitagora $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ cm	1p

3. Fie cercul $\mathcal{C}(O,1)$ de centru O și rază R=1 și punctul $A(1,0)\in\mathcal{C}(O,1)$. Un punct M de pe cercul $\mathcal{C}$ are o mișcare uniformă în sens direct trigonometric. Spunem că mișcarea este uniformă dacă în intervale de timp egale, punctul parcurge arce de cerc de lungimi egale. La momentul inițial t=0, punctul M coincide cu punctul A. În timp de o secundă, punctul M parcurge pe cerc un arc AM astfel încât $m(\sphericalangle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}))=\frac{\pi}{9}$.

a)După cât timp, de la punerea în mișcare, punctul M trece prima dată prin punctul A?

b)Indicați pe un desen care va fi poziția punctului M după 90 de secunde. Dar după 3 minute?

c)Fie $B'\in\mathcal{C}(O,1)$, astfel încât $m(\sphericalangle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'}))=\frac{3\pi}{2}$. Indicați după cât timp punctul M trece prima dată prin punctul B. În ce alte momente t punctul M trece din nou prin punctul B.

a)	*Soluție* Într-o secundă se parcurge măsura arcului $m(AM)=\frac{\pi}{9}$ radiani	1p
	1sec..... $\frac{\pi}{9}$; ***x*** sec..... 2π ; $x=\frac{2\pi}{\pi}\cdot 9=18$ sec	1p
	M trece prima dată prin A după 18 secunde	1p
	M trece a doua oară prin A după 36 de secunde	1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

b)	În 90 de secunde punctul M parcurge de 5 ori cercul. Prin urmare, după 90 de secunde se găsește din nou în punctul A. După 3 minute, punctul M se găsește tot în A.	1p
c)	1sec..... $\frac{\pi}{9}$; x sec..... $\frac{3\pi}{2}$; $x=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{9}{\pi}=\frac{27}{2}$ secunde	1p
	Celelalte momente sunt de forma $\frac{27}{2}+k\cdot 18$	1p

4. Doi fizicieni testează o minirachetă, lansând-o de la sol. Se notează înălțimea cu $h(t)$ (în metri) și timpul cu t (în secunde). Fizicienii estimează că înălțimea pe care o va atinge miniracheta, în funcție de timp, este dată de relația $h(t)=-5t^2+100t$.

a) La cât timp de la lansare miniracheta ajunge din nou la sol?

b) Demonstrați că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0,10]$ și descrescătoare pe intervalul $[10,20]$.

c) Care este înălțimea maximă pe care o poate atinge miniracheta?

a)	Soluție Nivelul solului se consideră a fi identificat cu axa absciselor(din planul de lansare a minirachetei).	1p
	În aceste condiții miniracheta atinge solul atunci când $h(t)=0$. Din $-5t^2+100t=0\Rightarrow t_1=0, t_2=20$; $t_1=0$ s reprezintă momentul lansării $t_2=20$ s reprezintă momentul în care ajunge din nou la sol	2p
b)	$h(t)=-5t^2+100t$ este definită pe $[0,20]$, deoarece pe acest interval functia h este pozitivă.	1p
	Punctul de maxim al acesteia se găsește în $\frac{-b}{2a}$, adică $t_v=\frac{100}{10}=10$. Atunci $h(t)$ este crescătoare pe intervalul $[0,10]$ și descrescătoare pe $[10,20]$.	2p
c)	Cea mai mare înălțime pe care o poate atinge miniracheta este dată de valoarea maximă a funcției $h(t)$. Aceasta este $h(10)=500$ m. Deci, cea mai mare înălțime pe care o poate atinge miniracheta este 500 de metri.	1p

CLASA A X-A

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

1. Fie binomul $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, cu suma coeficienţilor binomiali egală cu 256. Să se determine:

d) Termenul dezvoltării care nu îl conţine pe x.

e) Termenul din mijloc al dezvoltării.

f) Termenul dezvoltării care îl conţine pe x^2.

	Soluţie $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n\Rightarrow 2^n=2^8\Rightarrow n=8$
a)	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$ (formula termenului de rang k+1) $T_{k+1}=C_8^k\sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_8^k x^0;\quad \sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=x^0$
	$x^{\frac{8-k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{2}}=x^0\Leftrightarrow x^{4-k}=x^0\Rightarrow k=4$ $\Rightarrow T_5$ termenul dezvoltării care nu îl conţine pe *x*.
b)	Dezvoltarea are 9 termeni; termenul din mijloc $T_5\Rightarrow T_5=C_8^4x^0=70$
c)	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$ $C_8^k\sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_8^k x^2\Rightarrow x^{4-k}=x^2\Rightarrow k=2$ T_3 este termenul dezvoltării care îl conţine pe x^2.

2. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(a,1), B(-1,b), C(2,3)$ şi $D(3,2)$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real a, ştiind că aria triunghiului *ACD* este egală cu 10 u.a.

b) Să se determine numărul real b, ştiind că distanţa de la punctul *B* la dreapta *CD* este egală cu $\sqrt{2}$.

c) Stabiliţi o relaţie între *a* şi *b* astfel încât dreptele *AB* şi *CD* să fie paralele.

a)	*Soluţie* $A_{\triangle ACD}=\frac{h_A\cdot CD}{2};\ h_A=dist(A,CD), CD=\sqrt{2}$
	$CD: x+y-5=0$ $dist(A,CD)=\frac{\lvert a-4\rvert}{\sqrt{2}}, A_{\triangle ACD}=\frac{\frac{\lvert a-4\rvert}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{2}$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

	$\frac{\frac{\lvert a-4\rvert}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{2}=10, \lvert a-4\rvert=20\Rightarrow a_1=24, a_2=-16$	1p
b)	$CD: x+y-5=0$ $dist(B,CD)=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\lvert b-6\rvert}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\lvert b-6\rvert=2, b_1=8, b_2=4$	1p
c)	$AB\|\|CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}, m_{AB}=\frac{1-b}{a+1}, m_{CD}=-1\Rightarrow b=2+a$ sau $a=b-2$	2p

3. Un agent de închirieri propune pentru inchirierea unei mașini pentru o zi două tipuri de contracte:
-primul tip: 200 de lei și încă 1 leu pentru fiecare kilometru parcurs;
-al doilea tip: 100 de lei și încă 1,5 lei pentru fiecare kilometru parcurs.
Se notează cu $f_1(x)$ prețul pentru x kilometri parcurși în cazul încheierii unui contract de primul tip, iar cu $f_2(x)$ prețul pentru x kilometri parcurși în cazul încheierii unui contract de al doilea tip.

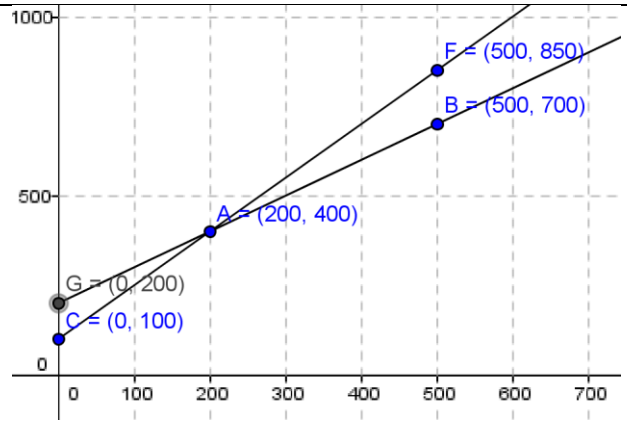
a) Scrieți expresiile pentru funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$. Reprezentați grafic, în același reper cartezian xOy, funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$, pentru $x\in[0,500]$

b) Indicați, utilizând graficul, tipul de contract mai avantajos în funcție de numărul de kilometri parcurși.

c) Găsiți și precizați rezultatele de la punctul b) prin calcul.

a)	*Soluție* $f_1(x)=200+x$ $f_2(x)=100+1,5x$	1p
b)	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>200</td><td>500</td></tr><tr><td>$f_1(x)$</td><td>200</td><td>400</td><td>700</td></tr><tr><td>$f_2(x)$</td><td>200</td><td>400</td><td>850</td></tr></table>	1p
		2p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

	 Din grafic rezultă că pentru o distanță de până la 200 km este mai avantajos al doilea tip de contract, iar pentru o distanță mai mare de 200 km este mai avantajos primul tip de contract.	1p
c)	Calculăm $f_1(x)-f_2(x)$ $f_1(x)-f_2(x)=200+x-100-1,5x=100-0,5x$	1p
	Dacă $100-0,5x>0\Rightarrow x<200\Rightarrow f_1(x)>f_2(x)$ $f_2(x)$ este mai avantajos decât $f_1(x)$ Dacă $100-0,5x<0\Rightarrow x>200\Rightarrow f_1(x)<f_2(x)$ $f_1(x)$ este mai avantajos decât $f_2(x)$.	1p

4. Într-o urnă sunt bile mari și bile mici. Aceste bile sunt albe și negre. Știm că sunt 5 bile mari și 4 bile mici, din care 6 bile sunt albe și 3 bile sunt negre.

a) Știind că 3 bile sunt în același timp albe și mari determinați:
-numărul de bile mici și negre;
-numărul bilelor mari și negre;
-numărul bilelor mici și albe.

b) Dacă extragem, la întâmplare o bilă din urnă, calculați probabilitatea ca aceasta să fie:
-albă și mică;
-albă;
-mică;
-albă sau mică.

a)	<u>*Soluție*</u> Știind că există 6 bile albe și 3 bile albe mari $\Rightarrow$ 3 bile albe mici	1p
	Deoarece 5 bile sunt mari, iar 3 bile sunt mari albe rezultă că 2 bile sunt mari negre;	1p
	Din condițiile că 4 bile sunt mici și 3 bile sunt mici și albe, rezultă că 1 bilă este mica neagră. În concluzie avem: 1 bilă mică și neagră; 2 bile mari și negre; 3 bile mici și albe.	1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

b)	Notăm evenimentele: A : obținerea unei bile albe; N : obținerea unei bile negre M : obținerea unei bile mari T : obținerea unei bile mici	1p
	$P(A\cap T)=\frac{3}{9}=0,(3)$	1p
	$P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=0,(6)$, $P(T)=\frac{4}{9}=0,(4)$	1p
	$P(A\cup T)=P(A)+P(T)-P(A\cap T)=$ $=\frac{6}{9}+\frac{4}{9}-\frac{3}{9}=\frac{7}{9}=0,(7)$	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Unui muncitor i s-a mărit salariul în ultimii 3 ani de două ori: o dată cu 48% și a doua oară cu 10%. După a doua mărire primește cu 753,60 lei pe lună mai mult decât înainte de prima mărire.

g) Aflați cât primea muncitorul înainte de fiecare mărire.
h) Aflați cât la sută primește acum, în plus, față de acum trei ani.
i) Aflați cât la sută reprezintă a doua mărire din prima mărire.

a)	*Soluție* Dacă salariul initial este S, atunci $0,48\cdot S+0,1\cdot(S+0,48\cdot S)=753,60\,\text{lei}$	2p
	1200 lei; 1776 lei	1p
b)	Salariul actual: $1776\,\text{lei}\times 1,1=1953,60\,\text{lei}$	1p
	$\frac{1953,60-1200}{1200}\times 100=62,8\%$	1p
c)	$\frac{1953,60-1776}{1776-1200}\times 100\approx 30,83\%$	2p

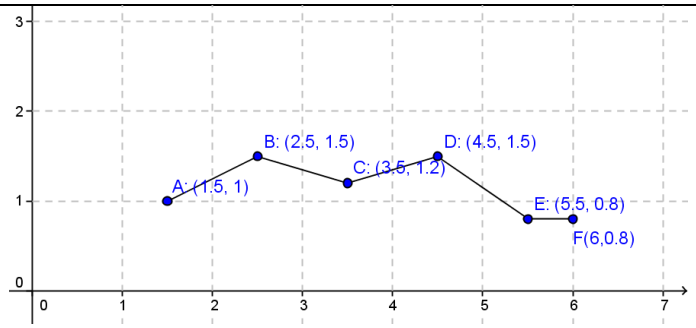
2. În tabelul de mai jos este prezentată distribuția unor piese după diametrul lor:

Mărimea diametrului (mm)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)
Frecvența absolută	10	15	12	15	8

a) Trasați poligonul frecType equation here.vențelor.
b) Calculați valoarea medie a diametrelor pieselor.
c) Știind că diametrul pieselor din fiecare clasă crește uniform, să se afle diametrul celei de-a 30-a piese.

a)	*Soluție*	2p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

	 Observatie: scara pentru reprezentare: 1 unitate pe grafic reprezinta 10 unitati reale	
b)	$\bar{x} = \dfrac{10\cdot\frac{10+20}{2}+15\cdot\frac{20+30}{2}+12\cdot\frac{30+40}{2}+15\cdot\frac{40+50}{2}+8\cdot\frac{50+60}{2}}{60}$ $\bar{x} = 34,(3)\ mm$	2p 1p
c)	$d_{30} = 30mm + 5\cdot\dfrac{40-30}{2}mm = 34,1(6)mm$	2p

3. a) Fie graful G cu vârfurile $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \geq 5$. Determinați numărul minim și numărul maxim de muchii astfel încât graful să aibă două puncte izolate.

b) Într-o tabără sunt 25 de elevi. Doi elevi sunt în relație de prietenie dacă ei se respect reciproc. Să se determine numărul minim și numărul maxim de relații de prietenie astfel încât exact 3 elevi să nu aibă prieteni.

a)	*Soluţie* Numai cu *n*-2 vârfuri se pot forma muchii	1p
	Numărul maxim de muchii este C_{n-2}^2	1p
	Pentru n varfuri numarul minim de muchii astfel incat sa avem exact 2 puncte isolate este (n-2)/2 + 1 daca n este impar şi (n-2)/2, daca n este par	3 p
b)	Pentru a avea exact trei elevi fără prieteni, numărul maxim de relații de prietenie trebuie să fie $C_{22}^2 = 231$	1p
	Numarul minim de relaţii de prietenie este (25-3)/2 = 11	1p

4. Se consideră graful cu $4n-2$ vârfuri:

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

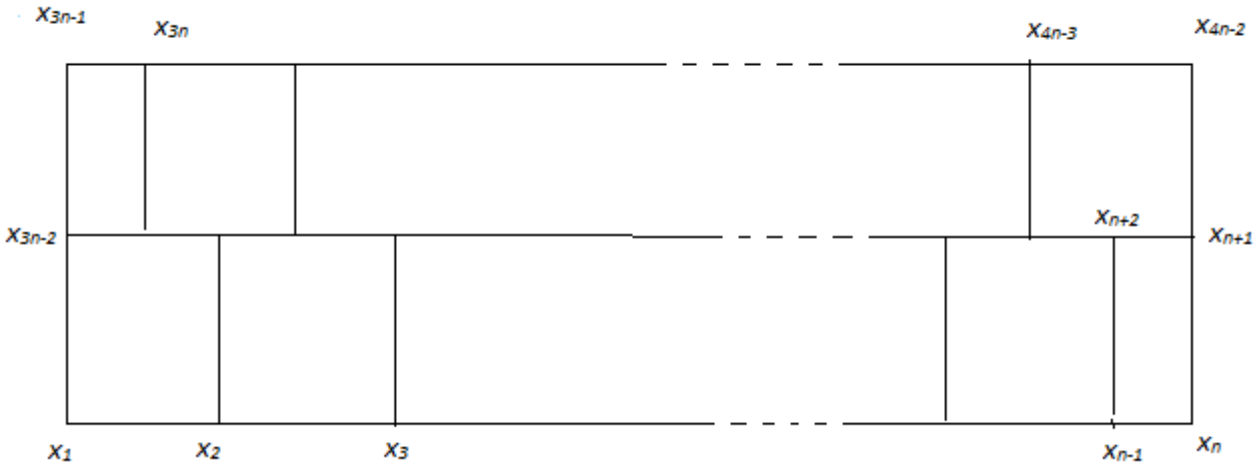
INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL



Să se arate că numărul muchiilor este de forma $6k+1, k \in \mathbb{N}^*$.

	Soluţie; Notăm cu m numărul muchiilor, iar cu $v(x_i) =$ ordinul lui x_i.	
	$2m = v(x_1) + v(x_2) + ... + v(x_{4n-2})$	3p
	$2m = v(x_1) + v(x_n) + v(x_{3n-1}) + v(x_{4n-2}) + 3 \cdot (4n-6)$	2p
	$2m = 8 + 3(4n-6) \Leftrightarrow m = 6n-5$	1p
	$m = 6(n-1)+1 \Leftrightarrow m = 6k+1$	1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = (x+4)(y+4)-4, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că operația este asociativă.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$.

c) Să se calculeze: $(-2014) \circ (-2013) \circ ... \circ 2013 \circ 2014$.

a)	*Soluție* $x \circ y = (x+4)(y+4)-4, \forall x, y \in \mathbb{R}$. $(x \circ y) \circ z = xyz + 4xy + 4yz + 4xz + 16x + 16y + 16z + 60$ (1) $x \circ (y \circ z) = xyz + 4xy + 4yz + 4xz + 16x + 16y + 16z + 60$ (2) Din (1) și (2) rezultă că operația este asociativă pentru $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.	1p 1p 1p
b)	$x \circ (-4) = (x+4)(-4+4)-4 = -4, \forall x \in \mathbb{R}$.	2p
c)	$(-2014) \circ (-2013) \circ ... \circ 2013 \circ 2014 =$ $= (-2014) \circ (-2013) \circ ... \circ (-5) \circ (-4) \circ (-3) \circ ... \circ 2013 \circ 2014 = -4$ deoarece $x \circ (-4) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$.	2p

2. În reperul cartezian *xOy*, se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n), n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Să se determine ecuația dreptei A_2A_3.

Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A_{2013}, A_{2014}, A_{2015}$.

a)	*Soluție* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Rezultă că punctele $O(0,0), A_1(1,2), A_2(2,4)$ sunt coliniare.	2p
b)	$A_2(2,4), A_3(3,8)$. Se obține ecuația dreptei $A_2A_3 : 4x - y - 4 = 0$.	2p
c)	Scrie formula ariei cu determinant. Calculează aria și obține: $A_{\triangle A_{2013}A_{2014}A_{2015}} = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} 2013 & 2^{2013} & 1 \\ 2014 & 2^{2014} & 1 \\ 2015 & 2^{2015} & 1 \end{vmatrix} \right| = 2^{2012}$	1p 2p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

3. Un elev își alege o matrice $A \in M_3(\square)$. Prietenul său allege o altă matrice $B \in M_3(\square)$, având grijă ca aceasta să comute cu matricea A($A \cdot B = B \cdot A$), dar astfel încât pătratele celor două matrice să coincidă. Demonstrați că suma celor două matrice este o matrice singulară.

	Soluție Din enunț avem: $A \neq B, A \cdot B = B \cdot A$ și $A^2 = B^2$	2p
	Presupunem că $A+B$ este inversabilă.	1p
	Avem: $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - A\cdot B + B\cdot A - B^2 = O_3$	2p
	Înmulțim la stânga cu $(A+B)^{-1}$ și obținem $A - B = O_3 \Rightarrow A = B$, contradicție.	2p

4. În toate pătrățelele unei table de dimensiuni 5×6 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și din fiecare coloană formează progresii aritmetice, în ordinea în care sunt scrise. Suma celor patru numere scrise în colțurile tablei este egală cu $\frac{4028}{15}$. Să se afle suma tuturor numerelor de pe tablă.

	Soluție $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$ numerele scrise pe tablă.	1p
	În linia i, $i = \overline{1,5}$, numerele $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i6}$ formează o progresie aritmetică, a cărei sumă este $\frac{6\cdot(a_{i1}+a_{i6})}{2} = 3\cdot(a_{i1}+a_{i6})$	1p
	Adunând aceste cinci sume se obține suma cerută	1p
	Așadar: $S = 3\cdot(a_{11}+a_{16}+a_{21}+a_{26}+a_{31}+a_{36}+a_{41}+a_{46}+a_{51}+a_{56})$	1p
	$S = 3\cdot[(a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}+a_{51})+(a_{16}+a_{26}++a_{36}++a_{46}++a_{56})]$	1p
	$S = 3\cdot[\frac{5\cdot(a_{11}+a_{51})}{2}+\frac{5\cdot(a_{16}+a_{56})}{2}] = \frac{15}{2}\cdot\frac{4028}{15} = 2014$	2p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*