INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se dă funcţia: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0.$

a) Pentru $a<0$ să se determine funcţia f cu proprietatea că graficul funcţiei determină cu axele de coordonate un triunghi isoscel cu aria de 8 cm^2.

b) Pentru $a=2$ şi $b=-1$ calculaţi: $f\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)+f\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)+...+f\left(\frac{1}{99\cdot 100}\right)$.

2. Cinci persoane joacă într-o piesă de teatru. Acţiunea piesei se petrece în anul 1980. Una dintre persoane observă că vârstele lor sunt în progresie aritmetică. Ştiind că suma pătratelor vârstelor este egală cu anul în care se petrece acţiunea piesei şi că toate persoanele au împreună 90 de ani, să se determine vârsta fiecărei persoane.

3. Se consideră funcţia de gradul al *II*-lea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-2(m-1)x+m-3, m\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcţiei *f* să intersecteze axa *Ox* în două puncte separate de axa *Oy*.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcţiei *f* să intersecteze axa *Ox* în două puncte cu abscise pozitive.

4. Fiind date punctele A şi B, să se arate că există un singur punct G cu proprietatea că $2\overrightarrow{AG}+5\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$.

a) Să se arate că $f\left(\frac{2+4}{2}\right)\le\frac{f(2)+f(4)}{2}$.

b) Demonstraţi că $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}, \forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Să se demonstreze că $\forall x,y,z>0, x^{\log_2\frac{y}{z}}\cdot y^{\log_2\frac{z}{x}}\cdot z^{\log_2\frac{x}{y}}=1$.

3. a) Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia: $\sqrt{\lg^2 x-\lg x^2+1}=3$

b) Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia: $\frac{e^x}{e^{\frac{1}{x}-1}}=e^{\frac{1}{x}}$.

4. În săptămâna 3 – 8 martie 2013 managerul unei unităţi hoteliere a constatat că numărul de locuri ocupate începând cu ziua de luni şi până sâmbătă inclusiv sunt numere în progresie geometrică.

a) Dacă în primele trei zile s-au ocupat 26 locuri şi în ultimele 3 zile s-au ocupat 702 locuri, aflaţi câte locuri s-au ocupat în fiecare zi.

b) Dacă pentru fiecare loc ocupat se plăteşte suma de 110 lei, care a fost suma încasată până la finalul zilei de joi?

c) Ce procent reprezintă numărul locurilor ocupate vineri din numărul total de locuri ocupate în cele şase zile?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

Clasa a XI-a

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

1. Doi elevi depun câte 1000 lei la bancă. Primul face un depozit pe 3 luni cu acumulare, la o rată anuală a dobânzii de 20%, iar al doilea face un depozit scadent la 1 an. Ştiind că după doi ani au încasat aceeaşi sumă de bani, aflaţi:

a) Care este suma încasată de fiecare?
b) Care a fost rata anuală a dobânzii pentru al doilea elev?

Precizări: *nu se percep alte comisioane, şi ambele depozite se prelungesc automat la scadenţă.*

2. Un camion care colectează lapte de la producătorii agricoli din 7 sate, numite 1, 2, 3 …7, pleacă întotdeauna din satul 1 (unde locuieşte camionagiul), şi are ca destinaţie finală satul 7 (unde este firma ce prelucrează laptele). Ştiind că oricare două sate sunt legate printr-o singură şosea, să se afle:

a) Câte şosele leagă cele 7 sate?
b) În câte moduri poate ajunge din satul său la firmă camionagiul, ştiind că trece cel mult o dată prin fiecare sat şi , de fiecare dată, ordinea parcurgerii satelor este ordinea crescătoare a numelor.

3. În urma unui studiu privind greutatea elevilor dintr-o şcoală, s-au obţinut datele din tabelul de mai jos:

Masa (în kg)	[40,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,120)
Nr. elevi	45	105	135	60	30

a) Ce procent din numărul total de elevi îl reprezintă cei cu masa de cel puţin 80 kg?
b) Să se calculeze masa medie, abaterea medie liniară, dispersia şi abaterea medie patratică.

4. La un turneu de tenis de câmp se joacă în sistem eliminatoriu (în urma unui meci câştigătorul merge în turul următor, iar învinsul este eliminat din competiţie). Ştiind că sunt 60 de jucători participanţi, iar unii jucători nu dispută primul tur, mergând direct în al doilea (pentru ca din turul 2 tabloul să conducă la un singur caştigător), aflaţi:

a) Câte partide a jucat caştigătorul turneului, ştiind că a început din primul tur?
b) Câte partide s-au jucat în total?
c) Prin ce fel de graf se poate întocmi programul meciurilor competiţiei?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Ştiinţe Sociale

Clasa a XII-a

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $A^2-5A=O_2$.

b) Calculaţi A^{2014}.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Să se arate că dacă B este o matrice pătratică de ordinul 3, cu elemente numere reale, astfel încât $A\cdot B = B\cdot A$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană a lui B este aceeaşi.

3. Considerăm matricele de forma $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Demonstraţi că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2015}=O_3$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

b) Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

c) Determinaţi numărul real x dacă $A(1)\cdot A(x)=I_3$.

3. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(-2,1)$, $D(2, 1)$ şi dreapta (d) de ecuaţie $x - y + 1 = 0$. Determinaţi coordonatele punctului M situat pe dreapta (d), ştiind că triunghiurile MAB şi MCD au aceeaşi arie.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

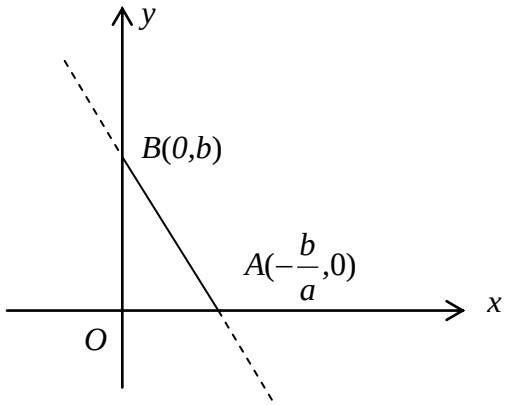
Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE
CLASA a IX-a

1.

a)



Triunghiul este dreptunghic. $(m(\hat{O}) = 90^0)$

$OA = OB \Rightarrow -\frac{b}{a} = b \Rightarrow a = -1$ ..... 1 p

$A_{\Delta AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = -\frac{b^2}{2a}$ ..... 1 p

$\begin{cases} a = -1 \\ -\frac{b^2}{2a} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pm 4 \end{cases}$ ..... 1 p

$f_1(x) = -x + 4$ și $f_2(x) = -x - 4$ ..... 1 p

b) $f(x) = 2x - 1$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ..... 1 p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

$2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)-1+2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-1+\ldots+2\cdot\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)-1=2\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)-99$ ..... 1 p

$99\cdot\left(\frac{1}{50}-1\right)=-\frac{99\cdot 49}{50}=-\frac{4851}{50}$ ..... 1 p

2. Fie $x-2r, x-r, x, x+r$ *şi* $x+2r$ vârstele celor cinci persoane ..... 1 p

$(x-2r)+(x-r)+x+(x+r)+(x+2r)=90\Rightarrow 5x=90\Rightarrow x=18$ ..... 1 p

$(x-2r)^2+(x-r)^2+x^2+(x+r)^2+(x+2r)^2=1980$ ..... 1 p

$5x^2+10r^2=1980$ ..... 2 p

$10r^2=360\Rightarrow r^2=36\Rightarrow r=\pm 6$ ..... 1 p

În această situație obținem: 6, 12, 18, 24, 30 (ani) sunt vârstele celor cinci persoane. ..... 1 p

3. a) Ecuația de gradul al II-lea $f(x)=0$ trebuie să admită două rădăcini reale, una negativă și una pozitivă..... 1 p

Trebuie să avem $\begin{cases}\Delta>0\\P<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4(m-1)^2-4m(m-3)>0\\\frac{m-3}{m}<0\end{cases}$ ..... 2 p

Obține $\begin{cases}4m+4>0\\\frac{m-3}{m}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>-1\\m\in(0,3)\end{cases}\Rightarrow m\in(0,3)$ ..... 1 p

b) Trebuie să avem $\begin{cases}\Delta>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>-1\\\frac{m-3}{m}>0\\\frac{2(m-1)}{m}>0\end{cases}$ ..... 1 p

$\begin{cases}m\in(-1,+\infty)\\m\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)\\m\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\end{cases}\Rightarrow m\in(-1,0)\cup(3,+\infty)$ 2p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

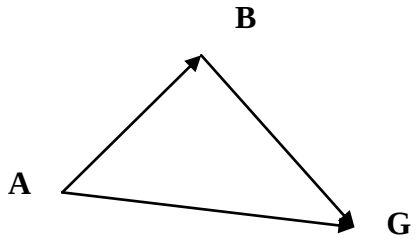
CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

4.



Figură ..... 1 p

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ ..... 1 p

$2\overrightarrow{AG} + 5\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG} - 5\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$ ..... 2 p

Rezultă: $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$ ..... 1 p

Cum A şi B sunt puncte date (fixate), rezultă că G este unic determinat ..... 2 p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE - CLASA A X-A

1. a) $f\left(\frac{2+4}{2}\right) \leq \frac{f(4)+f(2)}{2} \Leftrightarrow 2^3 \leq \frac{2^4+2^2}{2}$ 2p

   b) $2^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{2^a+2^b}{2} \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{a}{2}} \cdot 2^{\frac{b}{2}} \leq \frac{2^a+2^b}{2}$ 2p

   $2\sqrt{2^a \cdot 2^b} \leq 2^a + 2^b$ 1p

   $2^a - 2\sqrt{2^a} \cdot \sqrt{2^b} + 2^b \geq 0$ 1p

   $(\sqrt{2^a} - \sqrt{2^b})^2 \geq 0$ 1p

2. Logaritmează în baza 2 egalitatea dată şi obţine:

   $\log_2\left(x^{\log_2\left(\frac{y}{z}\right)} \cdot y^{\log_2\left(\frac{z}{x}\right)} z^{\log_2\left(\frac{x}{y}\right)}\right) = 0$.....…… 2p

   Rezultă:

$$\left(\log_2 \frac{y}{z}\right)(\log_2 x) + \left(\log_2 \frac{z}{x}\right)(\log_2 y) + \left(\log_2 \frac{x}{y}\right)(\log_2 z) = 0$$.....2p

$$\log_x x\,(\log_2 y - \log_2 z) + \log_2 y\,(\log_2 z - \log_2 x) + \\ + \log_2 z\,(\log_2 x - \log_2 y) = 0$$…….. .....1p

$$(\log_2 x)(\log_2 y) - (\log_2 x)(\log_2 z) + (\log_2 y)(\log_2 z) - \\ - (\log_2 y)(\log_2 x) + (\log_2 z)(\log_2 x) - (\log_2 z)(\log_2 y) = 0$$.....1 p

Finalizare.....1 p

3. a) Condiţii de existenţă $\begin{cases} x > 0 \\ lg^2 x - lgx^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$.....1p

$lg^2 x - lgx^2 + 1 = lg^2 x - 2lgx + 1 = (lgx - 1)^2 \geq 0, (\forall) x > 0$ 1p

Ecuaţia devine: $|lgx - 1| = 3, rezultă\ lgx - 1 = \pm 3$.....1p

Obţine: $x_1 = 10^{-2}$ şi $x_2 = 10^4$.....1p

b) Ecuaţia devine: $e^{x-\frac{1}{x}+1} = e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$….. .....1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

Rezultă: $x-\frac{1}{x}+1=\frac{1}{x}$ implică $x-\frac{2}{x}+1=0$ 1p

$x^2+x-2=0$ implică $x_1=1, x_2=-2$ 1p

4. a) Fie $n; nq; nq^2; nq^3; nq^4; nq^5$, numărul de locuri ocupate de luni până sâmbătă.....1p

Avem: $\begin{cases} n(1+q+q^2)=26 \\ n\cdot q^3(1+q+q^2)=702 \end{cases}$ rezultă $q^3=27$ rezultă q =3 şi n=2.....1p

Începând de luni şi până sâmbătă, inclusiv, s-au ocupat: $2; 6; 18; 54; 162; 486$ locuri.....1p

b) Până joi, inclusiv, s-au ocupat: $(2+6+18+54)=80$ locuri.....1p

Suma încasată este 8800 lei.....……..... .... 1p

a) Numărul total de locuri ocupate în cele şase zile este 728..……..... ...1p

Numărul de locuri ocupate vineri reprezintă 22,25% din numărul total de locuri ocupate în cele şase zile.....1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Ştiinţe Sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE
CLASA A XI-A

1. a) r=20% pe an; rate pe 3 luni este de 5%……2p

S=1000 $(1+0,05)^8$ ……2p

b) Daca r_1 este rata anuală pentru al doilea elev: S=1000 $(1+r_1)^2$ ……..2 p

$r_1 = 1,05^4-1 = 21,55\%$ ……1p

2. a) Număr şosele este egal cu numărul de muchii pentru un graf complet cu 7 noduri…..1p

Număr şosele este $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$ …… 2p

b) Număr drumuri este egal cu numărul de submulţimi ale mulţimii {2,3,4,5,6,7}……....2 p

Cardinalul mulţimii {2,3,4,5,6,7} este 6 şi numărul de drumuri este 2^6 …….. …… 2p

3. a) $\frac{90}{375} = 0,24$ si deci 24% au cel puţin 80 kg ……..1p

b) Media este $(45\cdot 50 + 105\cdot 65 + 135\cdot 75 + 60\cdot 85 + 30\cdot 105) : 375 = 73,2$ …… ..2p

Abaterea medie liniară: $(45\cdot 23,2 + 105\cdot 8,2 + 135\cdot 1,8 + 60\cdot 11,8 + 30\cdot 31,8) : 375 = 10,16$ .. 2p

σ^2 = $(45\cdot 23,2^2 + 105\cdot 8,2^2 + 135\cdot 1,8^2 + 60\cdot 11,8^2 + 30\cdot 31,8^2) : 375 = 187,76$ ……1p

Abaterea medie patratică $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 13,702$ ……1p

4. a) $2^5 < 60 < 2^6$ şi de aici câştigătorul (care a jucat primul tur) a jucat 6 meciuri …… ..1p

b) Numărul de meciuri din turul 1 este astfel încât, pentru turul 2, să rămână 32 de jucători …2p

Numărul de meciuri este 28+16+8+4+2+1 = 59 ……..2p

c) Fiind o competiţie sportivă în sistem eliminatoriu, poate fi descrisă printr-un graf arbore 2p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

Profil Filologie / Științe Sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

1. a)

$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$ 2p

Finalizare 2p
b) Demonstrează $A^n = 5^{n-1}A$... ..... 2p
$A^{2014} = 5^{2013} \cdot A$ 1p

2.

Fie $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 1p
Calculează $A \cdot B$ 2p
Calculează $B \cdot A$ 2p
Impune condiţia $A \cdot B = B \cdot A$ 1p
Deduce: $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3$ ... 1p

3.

a) $(A(x) - A(y))^3 = O_3$ 1p
Finalizare 1p
b)Demonstrează cerinţa 2p
c) Arată că $A(1) \cdot A(x) = A(1+x)$ 1p
$A(x + 1) = A(0)$ 1p
$x = -1$ 1p

4.

Fie $M(a, b)$ 1p
Impune condiţia $M \in d$ 1p
Deduce $M(a, a + 1)$ 1p
Calculează ariile celor două triunghiuri 2p
Din condiţia de arii egale, deduce $|a + 1| = 2|a|$ 1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

Obţine $M(1, 2)$ sau $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 1p