INTEGRAREA INEGALITĂȚILOR

Fără a calcula integrale, arătați că:

1) $\int_1^3 \frac{x^2+1}{x-3}\,dx > 0$

2) $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\sin x - 2}\,dx < 0$

3) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx > \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$

4) $\int_0^1 e^{-x}\cdot x^2\,dx > \int_0^1 e^{-x^2}\cdot x^2\,dx$

5) $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx$

6) $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx < \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

7) $\int_2^{10} x\operatorname{arctg} x\,dx > \int_2^{10} \ln(1+x^2)\,dx$

8) $\frac{2}{e} < \int_{-1}^1 e^{-x^2}\,dx < 2$

9) $\frac{1}{3} < \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}\,dx < 1$

10) $\frac{1}{5} < \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5}\,dx < 1$

11) $\int_2^3 \frac{1}{2+x^3}\,dx \le \int_2^3 \frac{1}{2+x^2}\,dx$

12) $\int_0^1 e^x\,dx < \int_0^1 (1+x)^{1+x}\,dx$

13) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Arătați că: $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx$

E_1) vom compara $\ln(1+x)$ cu $\frac{x}{1+x}$

E_2) fie $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, $f:[1,2] \to \mathbb{R}$

E_3) $f'(x) = \frac{1}{1+x}, (1+x)' - \frac{1\cdot(1+x) - x\cdot(1+x)'}{(1+x)^2}$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$

$f'(x) = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$

E_4) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \Delta_f$

E_5)

x		$[1$		$2]$	
f'	||		$+ + +$		||
f	||	$f(1)$	$\nearrow$		||

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\left(1+\frac{3}{2}\right)^2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in [1,2]$

$\Rightarrow f_\Delta \nearrow$ pe $[1,2]$

$f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$ și ar trebui comparat cu 0

E_6) încercăm $\ln 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2 > \ln e^{\frac{1}{2}}$ și cum baza $b = e > 1 \Leftrightarrow 2 > e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{e}$ adev.

știm că $e = 2{,}7\ldots \Rightarrow \sqrt{e} = 1,\ldots \Rightarrow f(1) > 0$ și $f_\Delta \nearrow \Rightarrow f(x) > 0$

E_7) $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x} \mid \int_1^2 \ldots dx \Rightarrow \int_1^2 \ln(1+x)\,dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx$

Arătați că $\frac{1}{5} < \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5}\,dx < 1$

E_1) de fiecare dată când avem de comparat o integrală cu un număr, calculăm mai întâi mai mult ca funcția, apoi integrăm inegalitatea obținută

E_2) $f:[5;8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-9}{2x+5}$

$$f'(x) = \frac{2(2x+5) - (2x-9)2}{(2x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x+10-4x+18}{(2x+5)^2} = \frac{28}{(2x+5)^2} > 0$$

$\Rightarrow f \nearrow$

E_3)

x	5		8
f'	$+$	$+$	$+$
f	$\frac{1}{15}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

$f(5) = \frac{1}{15}$; $f(8) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

din tabel $\Rightarrow \frac{1}{15} \le f(x) \le \frac{1}{3} \Big| \int_5^8 \ldots dx$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{1}{15}\int_5^8 1\,dx < \int_5^8 f(x)\,dx < \frac{1}{3}\int_5^8 1\,dx$$

$$\frac{1}{15}\cdot 3 < I < \frac{1}{3}\cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{5} < I < 1$$

$\frac{1}{15} \cdot 3 < I < \frac{1}{3} \cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{5} < I < 1$

$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$ dacă $f(x) < g(x)$ $\forall x \in [a;b]$

Arătați că: $\int_2^3 \frac{1}{2+x^3}dx \leq \int_2^3 \frac{1}{2+x^2}dx$

$E_1)$ $x \in [2;3] \Rightarrow x^3 \geq x^2 \mid +2$

$\Rightarrow 2+x^3 \geq 2+x^2$

$E_2)$ deoarece $1+x^3$ și $2+x^2$ pozitive

$\Rightarrow \frac{1}{2+x^3} \leq \frac{1}{2+x^2} \mid \int_2^3 \ldots dx$

$E_3)$ $\int_2^3 \frac{1}{2+x^3}dx \leq \int_2^3 \frac{1}{2+x^2}dx$

Arătați că: $\int_0^1 e^x dx < \int_0^1 (1+x)^{1+x} dx$

E_1) nu pot compara direct pe e^x cu $(1+x)^{1+x}$

E_2) cu ajutorul monotoniei, compar pe e^x cu $(1+x)^{1+x}$, arăt că $e^x < (1+x)^{1+x}$

E_3) dacă considerăm fct sub forma respectivă, este foarte greu de derivat $(1+x)^{1+x}$

atunci prelucrăm inegalitatea

$$e^x < (1+x)^{1+x} \mid \ln(\cdot\cdot) \Rightarrow x < (1+x)\ln(1+x)$$

E_4) Fie $f(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$, $f:[0;1] \to \mathbb{R}$

E_5) $f'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 1\right)$

$$f'(x) = 1 - \ln(1+x) - 1 \Rightarrow f'(x) = -\ln(1+x)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(1+x) = 0 \Rightarrow 1+x = e^0 \Rightarrow x = 0 \in [0;1]$

x	$[0$		$1]$
f'	0	$-$	$-$
f	0	$\searrow$	

$f'(1) = -\ln 2 < 0$

$\Rightarrow f'(x) \le 0$ pe $[0;1]$

$\Rightarrow f_\searrow$ pe $[0;1]$

$f(0) = 0 - 1 \cdot \ln(0+1) = 0$ și $f_\searrow$ pe $[0;1] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \le 0$, $\forall x \in [0;1]$ și $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow x \le (1+x)\ln(1+x)$ și $x = (1+x)\ln(1+x) \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow e^x \le (1+x)^{1+x}$ și egalit doar pt $x = 0$

E_6) folosim $f(x) \le g(x)$ și $\exists$ interval $\subset [a;b]$ cu $f(x) < g(x)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$ în cazul nostru există $\left[\frac{1}{2};1\right]$ pt care $e^x < (1+x)^{1+x} \Rightarrow \int_0^1 e^x dx < \int_0^1 (1+x)^{1+x} dx$

Arătați că $\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

E_1) Compar $\frac{1}{e^{x^2}}$ cu $\frac{1}{1+x^2}$, not $x^2 = t$

compar e^t cu $1+t$

E_2) $f(t) = e^t - 1 - t$

$f'(t) = e^t - 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

x		-1		0	
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	↘		↘	0	↗

$f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} f(t) \geq 0$

$\Rightarrow e^t - 1 - t \geq 0 \Rightarrow e^t \geq 1 + t$

E_3) $t = x^2 \Rightarrow e^{x^2} \geq 1 + x^2 \Rightarrow \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \Big| \int_0^1 \dots dx$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$