CALCULUL INTEGRALEI DIN FUNCȚIA INVERSĂ

Calculați integralele următoare

1) $\int_1^{1+e} x \cdot f^{-1}(x)\,dx$, unde
$f:[1;e]\to[1;e+1]$, $f(x)=x+\ln x$

2) $\int_3^{11} f^{-1}(x)\,dx$, unde
$f:[1;2]\to[3;11]$, $f(x)=x^3+x+1$

3) $\int_5^{12} x^2 \cdot f^{-1}(x)\,dx$, unde
$f:[2;3]\to[5;15]$, $f(x)=x^2+ex-3$

4) $\int_2^{10} f^{-1}(x)\,dx = ?$ unde
$f(x)=x^3+x$

5) $\int_1^{13} f^{-1}(x)\,dx = ?$ unde
$f(x)=x^3+x^2+1$

6) $\int_{4/5}^{2} x f^{-1}(x)$ unde
$f(x)=\dfrac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}$

7)

Pentru $f(x)=x^3+x+1$, calculați

$$\int_3^{11} f^{-1}(x)\,dx$$

E_1) not $f^{-1}(x)=t \Leftrightarrow x=f(t) \mid (\,)' \Rightarrow dx=f'(t)\,dt$

E_2) $x=3 \Rightarrow f(t)=3$
obs. că $t=1$ soluție
f bijectivă
$\Rightarrow t=1$ sol unică

$x=11 \Rightarrow f(t)=11$
obs. că $t=2$ soluție
f bijectivă
$\Rightarrow t=2$ soluție unică

E_3) $I=\int_1^2 t\cdot f'(t)\,dt=\int_1^2 t(3t^2+1)\,dt=$

$=\int_1^2 (3t^3+t)\,dt=3\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_1^2+\frac{t^2}{2}\Big|_1^2=$

$=\frac{3}{4}(16-1)+\frac{1}{2}(4-1)=\frac{45}{4}+\frac{3}{2}=\frac{51}{4}$

Calculați: $I=\int_1^{1+e} x\cdot f^{-1}(x)\,dx$

$f(x)=x+\ln x$

E1) $I=\int_1^{1+e} x\cdot f^{-1}(x)\,dx$

$f^{-1}(x)=t \Leftrightarrow x=f(t) \mid ()' \Rightarrow dx=f'(t)dt$

E2) $x=1\Rightarrow f(1)=1$
obs. cu $t=1$ sol
f biject
$\Rightarrow t=1$ sol unică

$x=1+e \Rightarrow f(t)=1+e$
obs. cu $t=e$ sol
f bij
$\Rightarrow t=e$ sol unică

E3) $I(t)=\int_1^e f(t)\cdot t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

$I(t)=\int_1^e (t+\ln t)\cdot(t+1)\,dt \Rightarrow$

$I(t)=\int_1^e (t^2+t+t\ln t+\ln t)\,dt =$

$=\frac{t^3}{3}\Big|_1^e+\frac{t^2}{2}\Big|_1^e+\underbrace{\int_1^e t\ln t\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_1^e \ln t\,dt}_{I_2}$

E4) $I_1 \Rightarrow \begin{matrix} f=\ln t \Rightarrow f'=\frac{1}{t} \\ g'=t \Rightarrow g=\frac{t^2}{2}\end{matrix} \Rightarrow I_1=\frac{t^2}{2}\ln t\Big|_1^e-\frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\Big|_1^e$

$I_1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{e^2+1}{4}}$

$I_2 \Rightarrow \begin{matrix} f=\ln t \Rightarrow f'=\frac{1}{t} \\ g'=1 \Rightarrow g=t\end{matrix} \Rightarrow I_2=t\ln t\Big|_1^e-t\Big|_1^e=e-e+1=1$

E5) $I=\frac{e^3-1}{3}+\frac{e^2-1}{2}+\frac{e^2+1}{4}+1=\frac{4e^3-4+6e^2-6+3e^2+3+12}{12}=$

$=\frac{4e^3+9e^2+5}{12}$

Calculați: $\int_{4/5}^{2} x \cdot f^{-1}(x)\,dx$

dacă $f(x) = \dfrac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}$

$E_1)$ $I = \int_{4/5}^{2} x \cdot f^{-1}(x)\,dx$

$t = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(t) \,|\,()' \Rightarrow dx = f'(t)\,dt$

$E_2)$ $x = \frac{4}{5} \Rightarrow f(t) = \frac{4}{5}$
obs. că $f(1) = \frac{4}{5}$
f biject
$\Rightarrow t = 1$ sol. unică

$x = 2 \Rightarrow f(t) = 2$
obs. că $t = 0$ verifică
f biject
$\Rightarrow t = 0$ sol unică

$E_3)$ $I(t) = \int_{1}^{0} f(t) \cdot t \cdot f'(t)\,dt$; $f'(t) = \dfrac{-x^4-7x^2-20}{(x^2+4)^2}$

$I(t) = \int_{1}^{0} \dfrac{-t^3+2t^2-5t+8}{t^2+4} \cdot t \cdot \dfrac{-t^4-7t^2-20}{(t^2+4)^2}\,dt$

integrală rațională care se calculează