CALCULUL ARIILOR ȘI AL VOLUMELOR DINTRE ECUAȚIILE A DOUĂ CURBE

Calculați aria (notată $\mathcal{A}$) sau volumul (notat V) în funcție de cum se cere în problemele următoare:

1) $\mathcal{A}$ pt $y^2 = 8x$, $x^2 = y$

2) $\mathcal{A}$ pt $f(x) = -1 + \sqrt{2 - x^2}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$

3) $\mathcal{A}$ pt $f(x) = 4x$, $y = 2x$

4) V pt $x^2 + y^2 = 1$ și $y^2 = \frac{3}{2}x$

5) V pt $y = x^2$ și $y = \sqrt{x}$

6) $\mathcal{A}$ pt $y^2 = 8(2 - x)$ și $y^2 = 24(2 + x)$

7) $\mathcal{A}$ pt $x^2 + y^2 = 9$ și axa Ox

8) $\mathcal{A}$ pt $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ și axa Ox

9) $\mathcal{A}$ pt $y = x^3$ și $x = y$

10) $\mathcal{A}$ pt $y = \sqrt{2x}$ și $y = 2(x - 1)$

11) V pt $y = x$ și $y = \sqrt{2x - 8}$

12) $\mathcal{A}$ pt $y^2 = x$ și $x^2 + y^2 - 2x = 0$

13) $\mathcal{A}$ pt $y = x^4$ și $y = \sqrt{x}$

14) $\mathcal{A}$ pt $x^2 + y^2 = 16$ și $y^2 = 6x$

15) $\mathcal{A}$ pt $y^2 = x$ și $y = 2x - 1$

16) $\mathcal{A}$ pt $4y = x^2$ și $y^2 = 4x$

17) $\mathcal{A}$ pt $xy = 6$ și $x + y - 7 = 0$

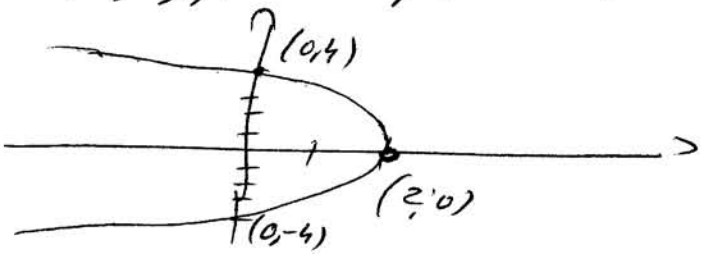
18) $\mathcal{A}$ pt $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ și $y = \frac{x^2}{2}$

19) $\mathcal{A}$ pt $y = x^2 + 4x$ și $y = x + 4$

Calculați aria dintre $y^2 = 8(2-x)$ și $y^2 = 24(2+x)$

E_1) deoarece $y^2 = 2px$ este ecuația unei parabole cu vârful în $O(0,0)$ cu axă de simetrie $Ox \Rightarrow y^2 = 8(2-x)$ este ec. unei parabole cu vârful în $(2;0)$, ramuri pe Ox negativ și axă de simetrie Ox

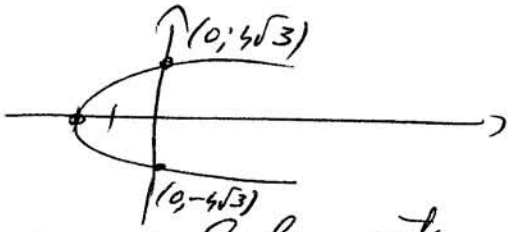
$x = 0 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$



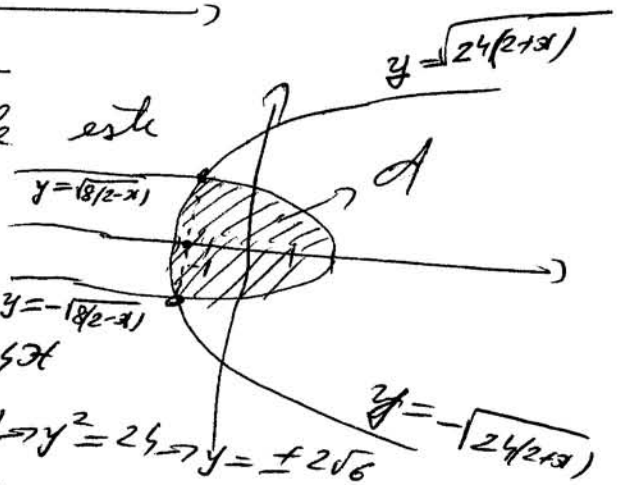
E_2) analog, $y^2 = 24(2+x)$ este ecuația unei parabole cu vârful în $(-2;0)$, axă de simetrie Ox, ramuri pe Ox pozitiv

$x = 0 \Rightarrow y^2 = 48$

$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{3}$



E_3) Figura cu cele 2 parabole este

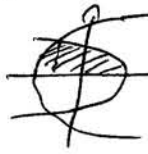


E_4) pct de $\cap$ $\begin{cases} y^2 = 8(2-x) \\ y^2 = 24(2+x) \end{cases} \Rightarrow$

$8(2-x) = 24(2+x) \Rightarrow 16 - 8x = 48 + 24x$

$\Rightarrow 32x = -32 \Rightarrow x = -1$, $y^2 = 8(2-x) \Rightarrow y^2 = 24 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{6}$

E_5) Aria este a unei figuri simetrice față de $Ox \Rightarrow$

$A = 2A_1$ unde A_1 este  iar A_1 o împărțim în

2 părți $\Rightarrow A_1 = \int_{-2}^{-1} \sqrt{24(2+x)}\,dx + \int_{-1}^{2} \sqrt{8(2-x)}\,dx = \frac{16\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 2A_1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{32\sqrt{6}}{3}}$

Obs.: $\int_{-2}^{-1} \sqrt{24(2+x)}\,dx = \sqrt{24}\int_{-2}^{-1} \sqrt{2+x}\,dx$, not $t = 2+x \Rightarrow dt = dx$ și

$x = -2 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I = \sqrt{24}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \sqrt{24}\cdot\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt \Rightarrow$

$I = \sqrt{24}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 \Rightarrow I = \sqrt{24}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{24}}{3}(1-0) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, analog $\int_{-1}^{2} = \frac{12\sqrt{6}}{3}$