GĂSIREA RELAȚIILOR DE RECURENȚĂ PENTRU INTEGRALE NEDEFINITE

Găsiți o relație de recurență pentru:

1) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$, $n \geq 1$

2) $I_n = \int \ln^n x \, dx$, $n \geq 1$

3) $I_n = \int x^n \cos x \, dx$, $n \geq 1$

4) $I_n = \int x^n \sin x \, dx$, $n \geq 1$

5) $I_n = \int x^n e^x dx$, $n \geq 1$

6) $I_n = \int \arcsin^n x \, dx$, $n \geq 1$

7) $I_n = \int e^x \sin^n x \, dx$, $n \geq 1$

8) $I_n = \int (\operatorname{tg} x)^n dx$, $n \geq 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, arătați că

$$I_n = \frac{1}{n}\left(x^{n-1}\cdot\sqrt{x^2+1} - (n-1)I_{n-2}\right), \forall n \geq 2$$

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

E1) $f(x) = x^{n-1} \Rightarrow f'(x) = (n-1)x^{n-2}$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}$

E2) $I_n = x^{n-1}\cdot\sqrt{1+x^2} - (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

$$I_n = x^{n-1}\sqrt{1+x^2} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$I_n = x^{n-1}\cdot\sqrt{1+x^2} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}+x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$I_n = x^{n-1}\cdot\sqrt{1+x^2} - (n-1)\left(\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right)$$

$$I_n = x^{n-1}\sqrt{1+x^2} - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n(1+n-1) = x^{n-1}\sqrt{1+x^2} - (n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n}\left(x^{n-1}\sqrt{1+x^2} - (n-1)I_{n-2}\right)$$

Prof. Ovidiu Bagdasar