DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR

Arătați că f se divide cu g în fiecare caz:

1) $f = X^4 - 2X^2 + 1$, $g = X^2 - 1$

2) $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 4$, $g = X^2 - 2$

3) $f = X^4 + 7X^2 + 12$, $g = X^2 + 3$

4) $f = X^3 - 7X^2 + 14X - 8$, $g = X^2 - 3X + 2$

5) $f = (X^4+1)^{6n+3} + (X^2+1)^{6p+3}$, $g = X^4 + X^2 + 1$

6) $f = X^{20} - X^{10} + X^4 + aX + b$, $g = (X-1)^2$

7) $f = 19X^{20} + 20X^{19} + X^3 + aX + b$, $g = (X+1)^2$

8) $f = (1+X)^{6n+1} - (1+X)^{6n+2} - 1$,
$g = X^2 + X + 1$

9) $f = (X-1)^{n+2} - X^{2n-2}$, $g = X^2 - X + 1$

10) $f = (X^2+X+1)^{2n+1} + (X^2-X+1)^{2n+1}$
$g = X^2 + 1$

11) $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$,
$g = (X-1)^2$

12) $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$, $g = X + \hat{3}$
în $\mathbb{Z}_5[X]$

13)

Fie $f = X^4 - 2X^2 + 1$ și $g = X^2 - 1$

Arătați că $f \vdots g$

E_1) vom arăta că toate rădăcinile lui $g(x)$ sunt rădăcini pentru $f(x)$

E_2) rădăcinile lui $g(x)$:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

E_3) verific dacă $x_1 = 1$ e rad. a lui f, calculez

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ e rad a lui } f$$

Analog, $f(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ e rad a lui f

E_4) toate rad. lui g sunt rad. ale lui $f \Rightarrow$

$$f \vdots g$$

Fie $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

Arătați că $f : (X-1)^2$

E_1) Folosim $f : g \Leftrightarrow$ toate rădăcinile lui g sunt și rădăcini pentru f de cel puțin același ordin de multiplicitate

E_2) rād. lui $g(x) = (x-1)^2$ le găsim astfel:

$g(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

vf. dacă $x=1$ e rād multiplă

$g'(x) = 2(x-1)$, $g'(1) = 0 \Rightarrow$ e rād mult de ordin ≥ 2

$g''(x) = 2$, $g''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ rād multiplă de ord 2

E_3) Ar trebui ca $x=1$ să fie rād. multiplă de ordin 2

$f(1) = n - (n+1) + 1 = n - n - 1 + 1 = 0$

$f'(x) = n(n+1)X^n - (n+1) \cdot nX^{n-1} + 0$

$f'(1) = n(n+1) - (n+1)n = 0$

$\Rightarrow x = 1$ e rād multiplă de ordin cel puțin 2 pentru f

E_4) $\Rightarrow f : g \Rightarrow f : (X-1)^2$

Fie $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $g = X + \hat{3}$ din $\mathbb{Z}_5[X]$

Găsiți $a \in \mathbb{Z}_5$ pentru care $f \vdots g$

$E_1)$ $f \vdots g \Leftrightarrow$ toate rădăcinile lui g sunt rădăcini pentru f

$E_2)$ Pt a găsi o rădăcină a lui g, rezolvăm

$g(x) = \hat{0} \Rightarrow x + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow x = -\hat{3}$ $\Big\} \Rightarrow$

Dar, în $\mathbb{Z}_5 \Rightarrow -\hat{3} = -3 + 5 = \hat{2}$

rădăcina unică a lui g este $x = \hat{2}$

$E_3)$ $x = \hat{2}$ e rădăcină pentru $f \Leftrightarrow$

$f(\hat{2}) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{2}^3 + a \cdot \hat{2}^2 + \hat{2} + \hat{1} = \hat{0}$

$\Leftrightarrow \hat{8} + \hat{4}a + \hat{3} = \hat{0}$

$\Leftrightarrow \hat{4}a + \hat{11} = \hat{0}$

$E_4)$ în $\mathbb{Z}_5$, $\hat{11} = 11 - 10 = \hat{1} \Rightarrow$ ecuația devine

$\hat{4}a + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{4}a = -\hat{1} \Leftrightarrow \hat{4}a = \hat{4}$ (am adunat $\hat{5}$)

$E_5)$

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

din tabel $\Rightarrow$ ecuația $\hat{4}a = \hat{4}$ are doar soluția $a = \hat{1}$