DETERMINAREA RESTULUI FOLOSIND PROBA ÎMPĂRȚIRII

Găsiți restul împărțirii lui f la g în fiecare din situațiile următoare:

1) $f = X^{2012} + X^2 + X$, $g = X^2 - 1$

2) $f = (X-6)^{2009} + X - 6$, $g = X^2 - 12X + 35$

3) $f = X^{2004} + 2X^3 + X - 1$, $g = X^2 - X$

4) $f = X^{2016} + X^5 + 2X^2 + X + 1$, $g = X^3 - X$

5) $f = X^{60} + X^{40} + X^{20} + 2$, $g = X(X^2 - 1)$

6) $f = X^{2015} - 2X^{2014} + X^3 - 2X^2 + 1$, $g = X^2 - 3X + 2$

7) $f = X^{30} - 6X^5 + 3X^2 + X + 4$, $g = (X-1)^2$

8) $f = X^{20} + X^{11} + 3X^2 + 2X + 6$, $g = X^3 - X^2$

9) $f = 3X^{10} - 80X^6 - 2X^2 + 7X + 2048$, $g = (X-2)^2$

10) $f = X^{12} + 3X^7 + X + 1$, $g = X(X+1)^2$

Găsiți restul lui f : g unde

$$f = X^{2012} + X^2 + X \text{ și } g = X^2 - 1$$

E_1) din proba împărțirii $\Rightarrow$

$$f(x) = g(x) \cdot C(x) + R(x) \text{ cu } gr\,R(x) < gr\,g(x)$$

$$\Rightarrow R(x) = ax + b$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 1)\,C(x) + ax + b \quad (*)$$

E_2) găsesc rădăcinile lui $g(x)$, pt asta rezolv

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

E_3) înlocuiesc în $(*)$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \cdot C(1) + a + b \Rightarrow a + b = f(1)$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \cdot C(-1) - a + b \Rightarrow -a + b = f(-1)$$

E_4) din $f = X^{2012} + X^2 + X$

$$\Rightarrow f(1) = 1 + 1 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$f(-1) = 1 + 1 - 1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

E_5) din E_3) $\Rightarrow$ $\begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases}$

$+$ " : $2b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

înlocuiesc $\Rightarrow$ $a + b = 3 \Rightarrow a = 3 - 2$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

E_6) $R(x) = ax + b \Rightarrow \boxed{R(x) = x + 2}$

RESTUL ÎMPĂRȚIRII LUI f la un polinom de gr II

E_1) descomp. pol de gr II în factori $\Rightarrow$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

E_2) scriem proba împărțirii și $R(x)=mx+n$

E_3) dau valori lui x rad. x_1 și x_2 $\Rightarrow$ sistem

$\Rightarrow m=\dots,\ n=\dots$

Exp: $f=(x-6)^{2009}+x-6$

x care restul $f:(x^2-12x+35)$

E_1) $x^2-12x+35 = a(x-x_1)(x-x_2)$

E_2) $x^2-12x+35=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{144-140}}{2}$ $\begin{matrix}7\\5\end{matrix}$

$\Rightarrow x^2-12x+35 = 1(x-7)(x-5)$

E_3) $f(x)=(x-7)(x-5)C(x)+mx+n$

$x=7 \Rightarrow f(7)= m\cdot 7+n \Rightarrow 7m+n=2$

$x=5 \Rightarrow f(5)= m\cdot 5+n \Rightarrow 5m+n=-2$

E_4) $\begin{cases} 7m+n=2 \\ 5m+n=-2 \end{cases}$

$-$: $2m = 4 \Rightarrow m=2$ înloc $\Rightarrow 14+n=2 \Rightarrow n=-12$

E_5) $R(x)=2x-12$

Fie $f = X^{2004} + 2X^3 + X - 1$, să se afle restul

$f : (X^2 - X)$

E_1) $\text{gr } f = 2004 \Rightarrow$ nu putem calcula restul lui f prin împărțire

E_2) proba împărțirii:

$f(X) = (X^2 - X) C(X) + R(X)$ cu $\text{gr } R(X) < \text{gr}(X^2 - X)$

$\Rightarrow \text{gr } R(X) < 2 \Rightarrow R(X) = aX + b \Rightarrow$

$f(X) = (X^2 - X) C(X) + aX + b$

E_3) găsim rădăcinile lui $X^2 - X \Rightarrow X^2 - X = 0 \Rightarrow X \in \{0; 1\}$

E_4) $f(0) = 0 \cdot C(0) + b \Rightarrow f(0) = b$

$f(1) = 0 \cdot C(1) + a + b \Rightarrow f(1) = a + b$

E_5) Dar, $f(X) = X^{2004} + 2X^3 + X - 1$

$\Rightarrow f(0) = 0 + 0 + 0 - 1 = -1$

$f(1) = 1 + 2 + 1 - 1 = 3$

E_6) $\begin{cases} b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases}$

înlocuiesc $\Rightarrow a - 1 = 3 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$\Rightarrow R(X) = 4X - 1$.

Fie $f = X^{2016} + X^5 + 2X^2 + X + 1$ și $g = X^3 - X$

Se cere restul $f : g$

E1) $f(X) = g(X) \cdot C(X) + R(X)$ cu $grR(X) < grg(X)$

$\Rightarrow grR(X) < 3 \Rightarrow R(X) = aX^2 + bX + c$

E2) din proba împărțirii $\Rightarrow f(X) = g(X) \cdot C(X) + aX^2 + bX + c$

$\Rightarrow \boxed{f(X) = (X^3 - X) C(X) + aX^2 + bX + c} \quad (*)$

E3) rad al $g(X) \Rightarrow X^3 - X = 0 \Rightarrow X(X^2 - 1) = 0 \begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \\ X = -1 \end{cases}$

E4) $X = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} f(0) = 0 \cdot C(0) + c \Rightarrow c = f(0)$

$X = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} f(1) = 0 \cdot C(1) + a + b + c \Rightarrow a + b + c = f(1)$

$X = -1 \overset{(*)}{\Rightarrow} f(-1) = 0 \cdot C(-1) + a - b + c \Rightarrow a - b + c = f(-1)$

E5) $f = X^{2016} + X^5 + 2X^2 + X + 1 \Rightarrow f(0) = 1$ și

$f(1) = 6$ și $f(-1) = 2$ și folosind E4)

E6) $\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 6 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 6 \\ a - b + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases}$

"+": $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

Înlocuim $\Rightarrow 3 + b = 5 \Rightarrow b = 2$

E7) $R(X) = aX^2 + bX + c \Rightarrow$

$\boxed{R(X) = 3X^2 + 2X + 1}$

Se cere restul lui $f:g$ dacă

$$f=x^{60}+x^{40}+x^{20}+2 \text{ și } g=x(x^2-1)$$

$E_1)$ $f(x):g(x)=c(x)$ rest $R(x)$ cu $\text{gr}\,R(x)<\text{gr}\,g(x)$

$\Rightarrow f(x)=g(x)\cdot c(x)+ax^2+bx+c \Rightarrow$

$f(x)=x(x^2-1)\,c(x)+ax^2+bx+c$

$E_2)$ $x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

$E_3)$ $x=0 \Rightarrow f(0)=0\cdot c(0)+0+0+c \Rightarrow f(0)=c$

$x=-1 \Rightarrow f(-1)=0\cdot c(-1)+a-b+c \Rightarrow f(-1)=a-b+c$

$x=1 \Rightarrow f(1)=0\cdot c(1)+a+b+c \Rightarrow f(1)=a+b+c$

$E_4)$ Dar, $f(x)=x^{60}+x^{40}+x^{20}+2 \Rightarrow f(0)=2$

$f(-1)=5$

$f(1)=5$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ a-b+c=5 \\ a+b+c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a-b=3 \\ a+b=3 \\ \hline 2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow b=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x)=3x^2+2$$

Găsiți restul lui $f:g$ dacă

$f = x^{30} - 6x^5 + 3x^2 + x + 4$, $g = (x-1)^2$

$E_1)$ $f(x) : g(x) = C(x)$ rest $R(x)$, gr $R(x) <$ gr $g(x)$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \cdot C(x) + ax + b$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = (x-1)^2 \cdot C(x) + ax + b}$ (1)

$E_2)$ $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow f(1) = 0 \cdot C(1) + a + b \Rightarrow \boxed{a + b = 3}$

$E_3)$ derivăm relația (1) $\Rightarrow$

$f'(x) = 2(x-1)C(x) + (x-1)^2 C'(x) + a$ și pt $x = 1$

$\Rightarrow f'(1) = 0 + 0 + a \Rightarrow a = f'(1)$

$f'(x) = 30x^{29} - 30x^4 + 6x + 1$, $f'(1) = 30 - 30 + 6 + 1$

$\Rightarrow f'(1) = 7 \Rightarrow \boxed{a = 7}$

$E_4)$ $a + b = 3$ și $a = 7 \Rightarrow 7 + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = -4}$

$R(x) = ax + b \Rightarrow \boxed{R(x) = 7x - 4}$

Găsiți restul lui $f:g$ unde

$f = 3X^{10} - 80X^6 - 2X^2 + 7X + 2048$, $g = (X-2)^2$

E_1) din proba împărțirii $\Rightarrow$

$f(X) = g(X) \cdot C(X) + R(X)$ cu $\text{gr } R(X) < \text{gr } g(X)$

$\Rightarrow \text{gr } R(X) < 2 \Rightarrow R(X) = aX + b$

$\Rightarrow f(X) = (X-2)^2 \cdot C(X) + aX + b \quad (*)$

E_2) găsesc rădăcinile pt $g(X) = (X-2)^2$, adică

$(X-2)^2 = 0 \Rightarrow X = 2$ dar observ că $g(2) = 0$ și

$g'(X) = 2(X-2) \Rightarrow g'(2) = 0$

E_3) înlocuiesc în $(*)$ pe $x = 2$

$\Rightarrow f(2) = 0 \cdot C(2) + 2a + b \Rightarrow \boxed{2a + b = f(2)}$

E_4) derivez $(*)$: $f'(X) = 2(X-2) \cdot 1 \cdot C(X) + (X-2)^2 C'(X) + a$

pt $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \cdot C(2) + 0 \cdot C'(2) + a \Rightarrow \boxed{a = f'(2)}$

E_5) din $f(X) = 3X^{10} - 80X^6 - 2X^2 + 7X + 2048$

$\Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2^{10} - 80 \cdot 2^6 - 8 + 14 + 2048 = 2^6(3 \cdot 2^4 - 80) + 6 + 2048 =$

$= 2^6 \cdot (-32) + 6 + 2048 = -2^{11} + 6 + 2^{11} = 6 \Rightarrow \boxed{f(2) = 6}$

E_6) din $f(X) = 3X^{10} - 80X^6 - 2X^2 + 7X + 2048 \Rightarrow$

$f'(X) = 30X^9 - 480X^5 - 4X + 7 \Rightarrow f'(2) = 30 \cdot 2^9 - 480 \cdot 2^5 - 1 =$

$= 2^5(30 \cdot 2^4 - 480) - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \boxed{f'(2) = -1}$

E_7) din E_3) $\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 6 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow -2 + b = 6 \Rightarrow b = 8$

E_8) $R(X) = aX + b \Rightarrow \boxed{R(X) = -X + 8}$

Fie $f = X^{12} + 3X^7 + X + 1$ și $g = X(X+1)^2$, să se determine restul $f : g$

E1) $f(X) : g(X) = C(X)$ rest $R(X)$ cu $gr\,R(X) < gr\,g(X)$

$\Rightarrow gr\,R(X) < 3 \Rightarrow R(X) = aX^2 + bX + c$

E2) din proba împărțirii $\Rightarrow \boxed{f(X) = g(X) \cdot C(X) + aX^2 + bX + c}$

$\Rightarrow \boxed{f(X) = X(X+1)^2 \cdot C(X) + aX^2 + bX + c}$ (*)

E3) căutăm rădăcinile lui $g(X)$, adică $X(X+1)^2 = 0$

$\Rightarrow \begin{matrix} X = 0 \\ (X+1)^2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow X = -1$

E4) înlocuim în (*) $\Rightarrow f(0) = 0 \cdot C(0) + c$

$f(-1) = 0 \cdot C(-1) + a - b + c$

$\Rightarrow$ 2 relații și 3 necunoscute $\Rightarrow$ derivăm (*)

E5) $f'(X) = 1 \cdot (X+1)^2 C(X) + X \cdot 2(X+1) \cdot 1 \cdot C(X) + X(X+1)^2 C'(X) + 2aX + b$

$X = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \cdot C(-1) + 0 \cdot C(-1) + 0 \cdot C'(-1) - 2a + b$

E6) $f(X) = X^{12} + 3X^7 + X + 1 \Rightarrow f(0) = 1$; $f(-1) = -3$ și

$f'(X) = 12X^{11} + 21X^6 + 1 \Rightarrow f'(-1) = -12 + 21 + 1 = 10$

E7) folosind E4) $\Rightarrow \begin{cases} \boxed{c = 1} \\ a - b + c = -3 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 1 = -3 \\ -2a + b = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = -4 \\ -2a + b = 10 \end{cases}$

$\overline{+}$ $-a = 6 \Rightarrow \boxed{a = -6}$ înlocuim $\Rightarrow -6 - b = -4$

$\Rightarrow -b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -2}$

$R(X) = aX^2 + bX + c \Rightarrow \boxed{R(X) = -6X^2 - 2X + 1}$