REGULI DE CALCUL ÎNTR-UN GRUP

Arătați că dacă $(G,\cdot)$ este un grup care are proprietatea specificată în fiecare caz, atunci $(G,\cdot)$ este abelian:

1) $(xy)^2 = x^2y^2, \forall x,y \in G$

2) $x^2 = e, \forall x \in G$

3) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \forall x,y \in G$

4) $x = x^{-1}, \forall x \in G$

5) $xy^{-1} = yx^{-1}, \forall x,y \in G$

6) $x^3 = e$ și $x^2y^2 = y^2x^2, \forall x,y \in G$

7) $x^3 = e$ și $(xy)^2 = (yx)^2, \forall x,y \in G$

Fie $(G,\cdot)$ un grup și $x,y \in G$ 2 elemente fixate, arătați că

11) dacă $x^5 = y^4 = e$ și $xy = yx^3$, atunci $yx = x^2y$

12) dacă $x^5 = y^4 = e$ și $xy = yx^3$, atunci $xy^3 = y^3x^2$

13) dacă $x^2 = y^2 = (xy)^2$, atunci $x^4 = y^4 = e$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietatea că

$$(xy)^2 = x^2y^2, \forall x,y \in G,$$

arătați că $(G,\cdot)$ abelian

$E_1)$ $(xy)^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow xyxy = xxyy \,/\cdot_S x^{-}$

$E_2)$ $yxy = xyy$ deoarece $x^{-1}x = e$

$E_3)$ din $yxy = xyy \,/\cdot_d y^{-1} \Rightarrow$

$$yx = xy, \forall x,y \in G$$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ grup abelian

Prof. Ovidiu Badescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietatea

$$x^2 = e,\ \forall x \in G$$

arătați că $(G,\cdot)$ abelian

$E_1)\ \forall x, y \in G \Rightarrow x \cdot y \in G$ (lege internă)

$E_2)$ Din ip, cum $x \cdot y \in G \Rightarrow \boxed{(xy)^2 = e}$ (1)

$E_3)$ Cum $x \in G \xrightarrow{ip} x^2 = e$
Cum $y \in G \xrightarrow{ip} y^2 = e$ $\Big\} \Rightarrow$

$$x^2 y^2 = e \cdot e \Rightarrow \boxed{x^2 y^2 = e} \quad (2)$$

$E_4)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow (xy)^2 = x^2 y^2 \Rightarrow$

$$xyxy = xxyy \,/\cdot_s x^{-1} \Rightarrow yxy = xyy \,/\cdot_d y^{-1}$$

$$\Rightarrow yx = xy,\ \forall x, y \in G$$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ comutativ

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietatea că

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1},\ \forall x, y \in G$$

arătați că $(G,\cdot)$ este abelian

E_1) Deoarece $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \Rightarrow$ relația din ipoteză devine:

$$y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Big|_{\cdot_s} y$$

$$\Rightarrow x^{-1} = yx^{-1}y^{-1} \Big|_{\cdot_s} x \Rightarrow$$

$$e = xyx^{-1}y^{-1} \Big|_{\cdot_d} y$$

$$\Rightarrow y = xyx^{-1} \Big|_{\cdot_d} x \Rightarrow$$

$$yx = xy,\ \forall x, y \in G$$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ abelian

Prof. Ovidiu Badescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietatea că

$$x = x^{-1}, \forall x \in G$$

arătați că $(G,\cdot)$ abelian

$E_1)$ $\forall x, y \in G \Rightarrow xy \in G$ (lege internă)

$E_2)$ $xy \in G \xrightarrow{\text{în}} \boxed{xy = (xy)^{-1}}$ (1)

$E_3)$ Dar, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \xrightarrow{(1)}$

$$\boxed{xy = y^{-1}x^{-1}} \quad (2)$$

$E_4)$ Cum $x \in G \Rightarrow x = x^{-1}$ și cum $y \in G$

$\Rightarrow y = y^{-1} \xrightarrow{(2)} xy = yx, \forall x, y \in G$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ comutativ

Prof. Ovidiu Băcescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietatea că:

$$xy^{-1}=yx^{-1},\ \forall x,y\in G$$

arătați că $(G,\cdot)$ grup abelian

$E_1)\ \forall x,y\in G$ avem $xy=x(y^{-1})^{-1}$

$E_2)$ din ip $x(y^{-1})^{-1}=y^{-1}x^{-1}$

$E_3)$ ca teorie, $y^{-1}x^{-1}=(xy)^{-1}$ și folosind relația de la $E_1) \Rightarrow xy=(xy)^{-1}$

$E_4)$ din $xy=(xy)^{-1}\,/\cdot_d\,(xy) \Rightarrow$

$$(xy)^2=e,\ \forall x,y\in G$$

$E_5)$ pentru $y=x \Rightarrow (x^2)^2=e \Rightarrow x^4=e$

pentru $y=x^2 \Rightarrow (x^3)^2=e \Rightarrow x^6=e$

$E_6)\ x^6=e \Rightarrow x^4\cdot x^2=e \xrightarrow{x^4=e} x^2=e,\ \forall x\in G$

$E_7)$ din $x^2=e,\ \forall x\in G \Rightarrow (xy)^2=e,\ \forall x,y\in G$

$\forall x,y\in G \Rightarrow x^2=e$ și $y^2=e \Rightarrow x^2y^2=e \Rightarrow$

$$(xy)^2=x^2y^2 \Rightarrow xyxy=xxyy\,/\cdot_s\,x^{-1}$$

$$\Rightarrow yxy=xyy\,/\cdot_d\,y^{-1} \Rightarrow yx=xy,\ \forall x,y\in G$$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ abelian

Prof. Ovidiu Băgescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietățile:

a) $x^3=e$, $\forall x\in G$ și

b) $x^2y^2=y^2x^2$, $\forall x,y\in G$

arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian

E_1) $\forall x,y\in G\Rightarrow x\cdot y\in G$ (lege internă)

E_2) Din ip, cum $x\cdot y\in G\Rightarrow (x\cdot y)^3=e\Rightarrow$

$$\boxed{xyxyxy=e} \quad (1)$$

E_3) $\left.\begin{array}{l} x\in G\Rightarrow x^3=e \\ y\in G\Rightarrow y^3=e \end{array}\right\}\Rightarrow x^3y^3=e\cdot e\Rightarrow x^3y^3=e$

$$\Rightarrow \boxed{xxxyyy=e} \quad (2)$$

E_4) Din (1) + (2) $\Rightarrow$

$$xyxyxy=xxxyyy \;/\cdot_s x^{-1}$$

$$\Rightarrow yxyxy=xxyyy \;/\cdot_d y^{-1}$$

$$\Rightarrow yxyx=xxyy$$

$$\Rightarrow \boxed{yxyx=x^2y^2} \quad (3)$$

E_5) Din ip, $x^2y^2=y^2x^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$$yxyx=y^2x^2\Rightarrow yxyx=yyxx \;/\cdot_s y^{-1}$$

$$\Rightarrow xyx=yxx \;/\cdot_d x^{-1}\Rightarrow xy=yx,\ \forall x,y\in G$$

$$\Rightarrow (G,\cdot) \text{ abelian}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietățile:

a) $x^3=e,\ \forall x\in G$ și

b) $(xy)^2=(yx)^2,\ \forall x,y\in G$

arătați că $(G,\cdot)$ abelian

E_1) $\forall x,y\in G \Rightarrow xy\in G$ (lege internă)

E_2) Din a), cum $xy\in G \Rightarrow \boxed{(xy)^3=e}$ (1)

E_3) $\left.\begin{array}{l}\forall x\in G\Rightarrow x^3=e\\ \forall y\in G\Rightarrow y^3=e\end{array}\right\}\Rightarrow x^3\cdot y^3=e\cdot e\Rightarrow \boxed{x^3y^3=e}$ (2)

E_4) Din (1) + (2) $\Rightarrow (xy)^3=x^3y^3\Rightarrow$

$xyxyxy=xxxyyy \mid \cdot_s x^{-1}\Rightarrow$

$yxyxy=xxyyy \mid \cdot_d y^{-1}$

$\Rightarrow yxyx=xxyy\Rightarrow$

$\boxed{(yx)^2=xxyy}$ (3)

E_5) Din b) $\Rightarrow (yx)^2=(xy)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow (xy)^2=xxyy\Rightarrow xyxy=xxyy \mid \cdot_s x^{-1}$

$\Rightarrow yxy=xyy \mid \cdot_d y^{-1}\Rightarrow yx=xy,\ \forall x,y\in G$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ abelian

Prof. Ciriu Bădescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup și $x, y \in G$ cu proprietățile: 1) $x^5 = y^4 = e$

2) $xy = yx^3$,

arătați că $xy^3 = y^3x^2$

$E_1)\ xy^3 = xyy^2 = (xy)y^2 \overset{2)}{=} yx^3y^2 =$

$= yx^2(xy)y \overset{2)}{=} yx^2yx^3y =$

$= yx(xy)x^3y = yx(yx^3)x^3y = y(xy)x^6y =$

$= y(yx^3)x^6y = y^2x^9y = y^2x^5x^4y \overset{1)}{=}$

$= y^2x^4y = y^2x^3(xy) \overset{2)}{=} y^2x^3(yx^3) =$

$= y^2x^2(xy)x^3 \overset{2)}{=} y^2x^2(yx^3)x^3 = y^2x^2yx^6 =$

$= y^2x^2yx^5x \overset{1)}{=} y^2x^2yx = y^2x(xy)x \overset{2)}{=}$

$= y^2x(yx^3)x = y^2(xy)x^4 \overset{2)}{=} y^2yx^3x^4 =$

$= y^3x^7 = y^3x^5x^2 \overset{1)}{=} y^3x^2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup și $x, y \in G$ cu proprietățile: 1) $x^5 = y^4 = e$ și

2) $xy = yx^3$,

arătați că $yx = x^2y$

E.1) $x^2y = x(xy) \overset{2)}{=\!=} xyx^3 = (xy)x^3 \overset{2)}{=\!=}$

$= (yx^3)x^3 = yx^6 = yx^5x = yx$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup și $x,y\in G$ cu proprietățile că $x^2=y^2=(xy)^2$, arătați că

$$x^4=y^4=e$$

$E_1)$ $x^2=(xy)^2 \Rightarrow x^2=xyxy \,/\cdot_s x \Rightarrow$

$$x=yxy$$

$E_2)$ $x^2=(yxy)(yxy)=yxy^2xy \overset{y^2=x^2}{=\!=} yxx^2xy=$

$$=yx^4y=y(x^2)^2y \overset{x^2=y^2}{=\!=} yy^4y=y^6=$$

$$=(y^2)^3 \overset{y^2=x^2}{=\!=} x^6$$

$E_3)$ din $x^2=x^6 \,/\cdot_s (x^2)^{-1} \Rightarrow \boxed{e=x^4}$

$E_4)$ pt a arăta că $y^4=e$ sau procedăm analog cu $y^2=(xy)^2 \Rightarrow y^2=xyxy \,/\cdot_d y^{-1}$

$\Rightarrow y=xyx$ și iese ca mai sus, sau, dacă suntem cât de cât deștepți, din

$$\left.\begin{array}{l} y^4=x^4 \\ e=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow y^4=e$$

Prof. Ovidiu Bădescu