PROPRIETĂȚILE LEGILOR DE COMPOZIȚIE

Studiați dacă următoarele legi sunt a) interne b) comutative c) asociative d) au elem neutru e) au toate elemente simetrizabile, în fiecare din situațiile următoare:

1) $x*y = xy-4x-4y+20$, $M=(4;\infty)$

2) $x*y = \frac{4x+4y}{4+xy}$, $M=(-2;2)$

3) $x*y = xy-6x-6y+42$, $M=[5;7]$

4) $x*y = (x-3)^{\ln(y-3)}+3$, $M=(3;\infty)$

5) $x*y = x\cdot y$, $M=\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbb{Z}$ și $a^2-5b^2=1\}$

6) $x*y = xy+4x+4y+12$, $M=(-4;\infty)$

7) $x*y = \frac{9x+9y}{9+xy}$, $M=(-3;3)$

8) $x*y = xy-4x-4y+20$, $M=[3;5]$

9) $x*y = (x-1)^{\ln(y-1)}+1$, $M=(1;\infty)\setminus\{2\}$

10) $x*y = x\cdot y$, $M=\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Z}$ și $a^2-3b^2=1\}$

11) $x*y = xy-x-y+2$, $M=[1;\infty)$

12) $x*y = \frac{x+y}{1+xy}$, $M=(-1;1)$

13) $x*y = xy-5x-5y+30$, $M=[4;6]$

14) $x*y = (x-2)^{\frac{1}{5}\ln(y-2)}+2$, $M=(2;\infty)$

15) $x*y = x\cdot y$, $M=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}$ și $a^2-2b^2=1\}$

16) $x*y = xy-2x-2y+6$, $M=(2;\infty)$

17) $x*y = \frac{16x+16y}{16+xy}$, $M=(-4;4)$

18) $x*y = xy-3x-3y+12$, $M=[2;4]$

19) $x*y = (x-4)^{\ln(y-4)}+4$, $M=(4;\infty)$

20) $x*y = x\cdot y$, $M=\{a+b\sqrt{7} \mid a,b\in\mathbb{Z}$ și $a^2-7b^2=1\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $M=(4;\infty)$ și $x*y=xy-4x-4y+20$. Studiați dacă pe M legea este a) internă b) comutativă; c) asociativă; d) are el. neutru e) toate elem. sunt simetrizabile

a) * lege internă pe M

E_1) $\forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y\in M$

E_2) $x\in M \Rightarrow x>4 \Rightarrow x-4>0$

$y\in M \Rightarrow y>4 \Rightarrow y-4>0$

„$\cdot$” $(x-4)(y-4)>0$

$\Rightarrow xy-4x-4y+16>0 \mid +4$

$\Rightarrow xy-4x-4y+20>4 \Rightarrow x*y\in M$

$\Rightarrow$ * lege internă pe M

b) * comutativă pe M

$\forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y=y*x$

$\left.\begin{array}{l} x*y=xy-4x-4y+20 \\ y*x=yx-4y-4x+20 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x*y=y*x \Rightarrow$ * comut

c) * asociativă pe M

$\forall x,y,z\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} (x*y)*z=x*(y*z)$

$(x*y)*z=(xy-4x-4y+20)*z=$

$=(xy-4x-4y+20)z-4(xy-4x-4y+20)$

$-4z+20$

$=xyz-4xz-4yz+20z-4xy+16x$

$+16y-80-4z+20$

$=\boxed{xyz-4xz-4yz-4xy+16x+16y+16z-60}$

$x*(y*z)=x*(yz-4y-4z+20)=$

$=x(yz-4y-4z+20)-4x-$

$-4(yz-4y-4z+20)+20$

$=xyz-4xy-4xz+20x-4x-$

$-4yz+16y+16z-60$

$=\boxed{xyz-4xy-4xz-4yz+16x+16y+16z-60}$

Prin urmare $(x*y)*z=x*(y*z)$ $\forall x,y,z\in M$

Având egalitate în cele 2 relații din chenar $\Rightarrow$ * asociativă pe M

d) * are el. neutru pe M:

$\exists e\in M$ a.î. $\forall x\in M$ să avem

$x*e=e*x=x$

Din $x*e=x \Rightarrow xe-4x-4e+20=x$

$\Rightarrow e(x-4)=5(x-4), \forall x\in M$

$\Rightarrow e=5\in M$

Deoarece * comut pe M $\Rightarrow$

$x*e=e*x \Rightarrow e=5$ el. neutru

e) * are toate elem. simetrizabile

$\forall x\in M, \exists x'\in M$ a.î. $x*x'=x'*x=e$

$x*x'=e \Rightarrow$

$xx'-4x-4x'+20=5 \Rightarrow$

$x'(x-4)=4x-15$

$x\in M \Rightarrow x>4 \Rightarrow x-4\neq 0$

$\Rightarrow x'=\frac{4x-15}{x-4}$, rămâne să arătăm că $x'\in M$ adică

$\frac{4x-15}{x-4}>4 \Leftrightarrow \frac{4x-15}{x-4}-4>0$

$\Leftrightarrow \frac{4x-15-4x+16}{x-4}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-4}>0$ adev. pt că

$x\in M$, deci $x>4 \Rightarrow x'\in M$

Deoarece * comut $\Rightarrow x*x'=x'*x$

$\Rightarrow x'=\frac{4x-15}{x-4}$ este simetricul lui x, $\forall x\in M \Rightarrow$ toate elementele lui M sunt simetrizabile

Fie $M=(-2;2)$ și $x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}$. Studiați dacă pe M legea este a) internă; b) comut; c) asociat; d) are el neutru; e) are toate elementele simetrizabile

a) * lege internă pe M

$E_1) \forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y\in M$

$E_2) x,y\in M \Leftrightarrow x\in(-2,2)$ și $y\in(-2,2)$

$\Leftrightarrow xy\in(-4;4) \Rightarrow -4<xy<4 \Rightarrow$

$4+xy>0$

$E_2)$ Pornim cu concluzia și folosim relații echivalente: $-2<\frac{4x+4y}{4+xy}<2 \mid \cdot(4+xy)>0$

$\Leftrightarrow -8-2xy<4x+4y<8+2xy \mid :2$

$\Leftrightarrow -4-xy<2x+2y<4+xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4-xy-2x-2y<0 \\ 2x+2y-4-xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(2+x)-y(x+2)<0 \\ 2(x-2)+y(2-x)<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+x)(-2-y)<0 \\ (x-2)(2+y)<0 \end{cases}$

$E_3) -2<x<2 \Rightarrow 2+x>0 \Rightarrow (2+x)(-2-y)<0$
$-2<y<2 \Rightarrow -2-y<0$

$-2<x<2 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow (x-2)(2+y)<0$
$-2<y<2 \Rightarrow 2+y>0$

$E_4)$ relațiile din sist sunt adev și deoarece am folosit relații echiv $\Rightarrow$ * internă pe M

b) * comut pe M

$E_1) \forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y=y*x$

$E_2) x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}$, $y*x=\frac{4y+4x}{4+yx}$

$\Rightarrow$ egalitate $\Rightarrow$ * comut pe M

c) * asociat pe M

$E_1) \forall x,y,z\in M \Rightarrow x*(y*z)=(x*y)*z$

$E_2)$ Folosim relații echiv: $x*(y*z)=(x*y)*z$

$\Leftrightarrow x+\frac{4y+4z}{4+yz}=\frac{4x+4y}{4+xy}+z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4x+\frac{16y+16z}{4+yz}}{4+x\cdot\frac{4y+4z}{4+yz}}=\frac{\frac{16x+16y}{4+xy}+4z}{4+\frac{4x+4y}{4+xy}\cdot z}$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{16x+4xyz+16y+16z}{4+yz}}{\frac{4+yz}{}}=\frac{\frac{16x+16y+16z+4xyz}{4+xy}}{16+4xy+4xz+4yz}$

și obținem relații adevărate, deoarece am folosit relații echivalente $\Rightarrow$ * asociat pe M

d) * are el neutru pe M

$\exists e\in M$ a.î. $\forall x\in M$ să avem $x*e=e*x=x$

$E_2) x*e=x \Leftrightarrow \frac{4x+4e}{4+xe}=x \mid \cdot(4+xe)$

$\Leftrightarrow 4x+4e=4x+4x^2e \Leftrightarrow e(4-4x^2)=0, \forall x\in$

$\Rightarrow e=0\in M$

$E_3)$ deoarece * comut $\Rightarrow x*e=e*x$

$\Rightarrow e=0$ el neutru pe M

e) * are toate elem. simetrizabile

$\forall x\in M, \exists x'\in M$ cu $x*x'=x'*x=e$

$E_2) x*x'=e \Leftrightarrow \frac{4x+4x'}{4+xx'}=0 \Leftrightarrow$

$4x+4x'=0 \Leftrightarrow x'=-x$

Deoarece $x\in M \Rightarrow x\in(-2,2) \Rightarrow$

$x'\in(-2,2) \Rightarrow x'\in M$

$E_3)$ cum * comut pe M $\Rightarrow$

$x*x'=x'*x \Rightarrow x'=-x$ simetrizabilul lui x, $\forall x\in M \Rightarrow$ * are TOATE elem simetrizabile pe M

Fie $M=[5,7]$ și $x*y=xy-6x-6y+42$. Studiați dacă pe M legea este: a) internă b) comut; c) asociat; d) are elem. neutru; e) are toate elem. simetrizabile

Observăm că nu avem nicio legătură între coeficienții de la lege și capetele intervalului, folosim forma restrânsă

$x*y=x(y-6)-6(y-6)+6 \Rightarrow$

$x*y=(x-6)(y-6)+6$

a) $*$ internă pe M:

$\forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y\in M$

$x\in M \Rightarrow 5\le x\le 7 \mid -6 \Rightarrow -1\le x-6\le 1$

$y\in M \Rightarrow 5\le y\le 7 \mid -6 \Rightarrow -1\le y-6\le 1$

Deoarece NU E VOIE să înmulțim ineg cu negative, folosim că produsul a 2 nr. din $[-1;1]$ este tot în $[-1;1]$

$\Rightarrow -1\le (x-6)(y-6)\le 1 \mid +6 \Rightarrow$

$5\le (x-6)(y-6)+6\le 7 \Rightarrow x*y\in M \Rightarrow *$ lege internă pe M

b) $*$ comut pe M:

$\forall x,y\in M \Rightarrow x*y=y*x$

$x*y=xy-6x-6y+42$ } $\Rightarrow$ egalit $\Rightarrow *$ comut pe M

$y*x=yx-6y-6x+42$ }

c) $*$ asociat pe M:

$\forall x,y,z\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*(y*z)=(x*y)*z$

$x*(y*z)=x*(yz-6y-6z+42)=$

$=x(yz-6y-6z+42)-6x-6(yz-6y-6z+42)+42$

$=xyz-6xy-6xz+42x-6x-6yz+36y+36z-252+42=$

$=xyz-6xy-6xz-6yz+36x+36y+36z-210$ (1)

$(x*y)*z=(xy-6x-6y+42)*z=$

$=(xy-6x-6y+42)z-6(xy-6x-6y+42)-6z+42=$

$=xyz-6xz-6yz+42z-6xy+36x+36y-252-6z+42=$

$=xyz-6xz-6yz-6xy+36x+36y+36z-210$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow *$ asociat pe M

d) $*$ are el neutru pe M

$\exists e\in M$ a.î. $\forall x\in M: x*e=e*x=x$

$x*e=x \Rightarrow xe-6x-6e+42=x$

$\Rightarrow e(x-6)=7x-42 \Leftrightarrow$

$e(x-6)=7(x-6)$, $\forall x\in M$ (deci $\exists$ o infinitate de x) $\Rightarrow e=7\in M$

deoarece $*$ comut $\Rightarrow x*e=e*x$

$\Rightarrow e=6$ el neutru pe M

e) $*$ are toate elem. simetrizabile pe M

$\forall x\in M, \exists x'\in M$ cu $x*x'=x'*x=e$

$x*x'=e \Rightarrow xx'-6x-6x'+42=7$

$\Rightarrow x'(x-6)=6x-35$

Dacă $x=6 \Rightarrow x'\cdot 0=-35 \Rightarrow 0=-35$ F. $\Rightarrow$ $x=6$ nu are simetric

Dacă $x\ne 6 \Rightarrow x'=\frac{6x-35}{x-6}$, ar trebui să studiem dacă $x'\in M$

$5\le \frac{6x-35}{x-6}\le 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le \frac{6x-35}{x-6} \\ \frac{6x-35}{x-6}\le 7 \end{cases}$

$\overset{x-6}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5-\frac{6x-35}{x-6}\le 0 \\ \frac{6x-35}{x-6}-7\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x+5}{x-6}\le 0 \\ \frac{-x+7}{x-6}\le 0 \end{cases}$

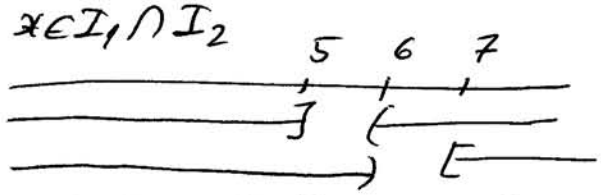
x		5		6	
$-x+5$	$+$	0	$-$		$-$
$x-6$	$-$		$-$	0	$+$
$F(x)$	$-$	0	$+$		$-$

$\frac{-x+5}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;5]\cup(6;\infty)$

x		6		7	
$-x+7$	$+$		$+$	0	$-$
$x-6$	$-$	0	$+$		$+$
$F(x)$	$-$		$+$	0	$-$

$\frac{-x+7}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;6)\cup[7;\infty)$

$x\in I_1\cap I_2$



$x\in(-\infty;5]\cup[7;\infty)$

Dar, $x\in M \Rightarrow x\in[5;7]$ } $\Rightarrow x\in\{5;7\}$

$\Rightarrow$ NU TOATE sunt simetrizabile, doar $x=5$ și $x=7$ simetrizabile

Prof Ovidiu Bădescu

Fie $M=(3;\infty)$ și $x*y=(x-3)^{\ln(y-3)}+3$. Studiați dacă pe M legea este: a) internă; b) comut; c) asociat; d) are el neutru; e) are toate elem. simetrizabile. dar dacă $M=(3;\infty)\setminus\{4\}$?

a) $*$ lege internă pe M:

$E_1) \forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y\in M$

$E_2) x\in M\Rightarrow x>3\Rightarrow x-3>0\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^{\ln(y-3)}>0\,|+3\Rightarrow (x-3)^{\ln(y-3)}+3>3$

$\Rightarrow x*y\in M$

$*$ s-a folosit: $a>0\Rightarrow a^{f(x)}>0, \forall f(x)$

b) $*$ comut pe M

$E_1) \forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y=y*x$

$E_2)$ Pornim cu concluzia și folosim relații echivalente

$x*y=y*x\Leftrightarrow (x-3)^{\ln(y-3)}+3=(y-3)^{\ln(x-3)}+3$

$\Leftrightarrow (x-3)^{\ln(y-3)}=(y-3)^{\ln(x-3)}\,|\ln(\dots)$

$\Leftrightarrow \ln(y-3)\cdot\ln(x-3)=\ln(x-3)\cdot\ln(y-3)$

adev. Deoarece am folosit relații echivalente $\Rightarrow$ $*$ comut. pe M

c) $*$ asociat pe M

$E_1) \forall x,y,z\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*(y*z)=(x*y)*z$

$E_2)$ Pornim cu concluzia și folosim relații echivalente:

$x*(y*z)=(x*y)*z \Leftrightarrow$

$x*\left((y-3)^{\ln(z-3)}+3\right)=\left((x-3)^{\ln(y-3)}+3\right)*z\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^{\ln\left((y-3)^{\ln(z-3)}+3-3\right)}+3=$

$=\left((x-3)^{\ln(y-3)}+3-3\right)^{\ln(z-3)}+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^{\ln(y-3)^{\ln(z-3)}}=\left((x-3)^{\ln(y-3)}\right)^{\ln(z-3)}$

$\Leftrightarrow (x-3)^{\ln(z-3)\ln(y-3)}=(x-3)^{\ln(y-3)\ln(z-3)}$ adev.

Deoarece s-au folosit relaț echiv $\Rightarrow$ $*$ asociativă pe M

d) $*$ admite el neutru pe M

$E_1) \exists\,\theta\in M$ a.î. $\forall x\in M$ să avem

$x*\theta=\theta*x=x$

(s-a notat cu θ el neutru pt a nu-l confunda cu e de la ln)

$E_2) x*\theta=x\Leftrightarrow (x-3)^{\ln(\theta-3)}+3=x$

$\Leftrightarrow (x-3)^{\ln(\theta-3)}=x-3$. Cum $x-3>0$ avem voie să logaritmăm

$\Rightarrow \ln(x-3)^{\ln(\theta-3)}=\ln(x-3)\Leftrightarrow$

$\ln(\theta-3)\ln(x-3)=\ln(x-3)$, adev.

$\forall x\in M\Rightarrow \ln(\theta-3)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \theta-3=e^1\Rightarrow \theta=e+3\in M$

$E_3)$ deoarece $*$ comut $\Rightarrow x*\theta=\theta*x$

$\Rightarrow \theta=e+3$ el neutru al $*$ pe M

e) $*$ are toate elem simetrizabile

$\forall x\in M, \exists\, x'\in M$ cu $x*x'=x'*x=\theta$

$E_2) x*x'=\theta\Rightarrow (x-3)^{\ln(x'-3)}+3=e+3$

Logaritmăm $\Rightarrow \ln(x'-3)\ln(x-3)=\ln e$

Pt $\ln(x-3)=0\Leftrightarrow x-3=1\Leftrightarrow x=4\Rightarrow$

$\ln(x'-3)\cdot 0=1\Rightarrow 0=1$, K.O. $\Rightarrow \nexists\, x'$

Pt $\ln(x-3)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 4\Rightarrow \ln(x'-3)=\frac{1}{\ln(x-3)}$

$\Rightarrow x'-3=e^{\frac{1}{\ln(x-3)}}\Rightarrow x'=3+e^{\frac{1}{\ln(x-3)}}$

$E_3)$ cum $e>0\Rightarrow e^{\frac{1}{\ln(x-3)}}>0\Rightarrow x'\in M$

$E_4)$ cum $*$ comut $\Rightarrow x*x'=x'*x$

$\Rightarrow x'=3+e^{\frac{1}{\ln(x-3)}}$ este simetricul lui x, $\forall x\in(3;\infty)\setminus\{4\}$

Pt $x=4\Rightarrow \nexists$ simetric $\Rightarrow$ NU TOATE elem sunt simetrizabile

Dacă $M=(3;\infty)\setminus\{4\}$, atunci $\ln(x-3)\neq 0$ deci x' există întotdeauna, rămâne să arătăm că $x'\neq 4$, prin (R.A.) $\exists\, x'=4$

$\Leftrightarrow 3+e^{\frac{1}{\ln(x-3)}}=4\Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x-3)}=0$, K.O.

$\Rightarrow x'\in M\Rightarrow$ toate elem simetrizabile

Fie $M=\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbb{Z} \text{ și } a^2-5b^2=1\}$ și legea $x*y=x\cdot y$. Studiați dacă pe M legea este: a) internă; b) comut; c) asociat; d) are el neutru; e) are toate elementele simetrizabile

---

a) $*$ lege internă pe M

$E_1) \forall x,y\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y\in M$

$E_2) x\in M \Rightarrow x=a+b\sqrt{5}$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$ și $a^2-5b^2=1$

$y\in M \Rightarrow y=c+d\sqrt{5}$ cu $c,d\in\mathbb{Z}$ și $c^2-5d^2=1$

$E_3) x*y=x\cdot y=(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})=$

$=ac+ad\sqrt{5}+bc\sqrt{5}+5bd=$

$=(ac+5bd)+(ad+bc)\sqrt{5}$

$E_4) a,b,c,d\in\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} ac+5bd\in\mathbb{Z} \\ ad+bc\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow x*y=A+B\sqrt{5}$ cu $A,B\in\mathbb{Z}$

$E_5)$ Rămâne să arătăm că $A^2-5B^2=1$, calculăm $A^2-5B^2=$

$=(ac+5bd)^2-5(ad+bc)^2=$

$=a^2c^2+10abcd+25b^2d^2-5a^2d^2-10abcd-5b^2c^2$

$=a^2c^2+25b^2d^2-5a^2d^2-5b^2c^2=$

$=a^2(c^2-5d^2)-5b^2(c^2-5d^2)=$

$=a^2-5b^2=1 \Rightarrow$

$A^2-5B^2=1 \Rightarrow x*y\in M$

b) $*$ comut. pe M

$\forall x,y\in M \Rightarrow x*y=y*x$

Deoarece $*=$ înmulțirea nr. reale și cum $M\subset\mathbb{R}$ iar înmulț e comutat. pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ înmulț comut. pe M

c) $*$ asociat pe M

$\forall x,y,z\in M \Rightarrow x*(y*z)=(x*y)*z$

Deoarece $*=$ înmulț nr. reale și cum $M\subset\mathbb{R}$ iar înmulț e asociat pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ înmulț e asociat pe M

d) $*$ are el neutru pe M

$\exists e\in M$ a.î. $\forall x\in M$ să avem $x*e=e*x=$

Deoarece $*=$ înmulț nr. reale și cum $M\subset\mathbb{R}$ iar înmulț are pe $\mathbb{R}$ ca el. neutru pe $e=1$, dacă $e=1\in M$ atunci $e=1$ el neutru pe M

$e=1=1+0\cdot\sqrt{5}$ cu $1,0\in\mathbb{Z}$ și $1^2-5\cdot0^2=1 \Rightarrow e=1\in M \Rightarrow e=1$ este el neutru pt $*$ pe M

e) $*$ are toate el. simetrizabile pe M

$\forall x\in M, \exists x'\in M$ cu $x*x'=x'*x=e$

Deoarece $*=$ înmulț nr. reale și cum $M\subset\mathbb{R}$ și cum $e=1$, avem

$x\cdot x'=x'\cdot x=1$

. Cum $x\in M \Rightarrow x=a+b\sqrt{5}$ cu $a^2-5b^2=1$ și dacă $x=0 \Rightarrow x=0+0\sqrt{5}$ dar $0^2-5\cdot0^2=0\neq1 \Rightarrow x=0\notin M$

Din $x\cdot x'=x'\cdot x=1 \Rightarrow x'=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x'=\frac{1}{a+b\sqrt{5}}=\frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}$

Cum $a^2-5b^2=1 \Rightarrow x'=a-b\sqrt{5}$

$\Rightarrow x'=a+(-b)\sqrt{5}$ și $a^2-5(-b)^2=$

$=a^2-5b^2=1 \Rightarrow x'\in M$

asadar $\forall x\in M \Rightarrow \exists x'\in M$

$\Rightarrow$ toate elem lui M sunt simetrizabile