LEGI DE COMPOZIȚIE
PB. NONSTANDARD

1) Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ și

$G=\{X(n)=I_2+nA \mid n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}$

Se cere:

$\forall X(n), X(2)\in G \Rightarrow X(n)\cdot X(2)\in G$

2) Fie $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$,

să se cer el. inversab din $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$

3) Arătați că $f:\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_7$ este un automorfism al grupului

$(\mathbb{Z}_7,+)$ unde $f(\hat{x})=\hat{2}\hat{x}$

4) Fie $\mathbb{Z}_7=\{\hat{0};\hat{1};\hat{2};\hat{3};\hat{4};\hat{5};\hat{6}\}$ și

$\mathbb{Z}_6=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5}\}$. Arătați

că $\nexists$ morfism de grupuri

$f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ cu

$f(\bar{2})=\hat{3}$

5) Arătați că $\nexists$ morf de inele de la $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ unde

$\mathbb{Z}[\sqrt{n}]=\{a+b\sqrt{n} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ iar

operațiile sunt cele consacrate,

adunarea resp înmulțirea

© Prof. Ovidiu Bădescu

$A=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}$, $G=\{X(p)=I_2+pA \mid p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}$

Se cere: $\forall X(p), X(q)\in G \Rightarrow X(p)X(q)\in G$

$E_1)$ se lucrează cu $X(p)$ sub forma I_2+pA

$E_2) X(p)X(q)=(I_2+pA)(I_2+qA)=$

$=I_2+(p+q)A+pqA^2$

$E_3) A^2=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=A$

$E_4) X(p)X(q)=I_2+(p+q+pq)A=X(p+q+pq)$

$E_5)$ Rămâne de arătat că $\forall p\neq -1, q\neq -1$

$\Rightarrow p+q+pq\neq -1$

$E_6)$ (R. A.) Pp. $p+q+pq=-1 \Rightarrow p+q+pq+1=0$

$p(1+q)+q+1=0 \Rightarrow (p+1)(q+1)=0$ $\begin{cases}p=-1 \text{ fals}\\ \text{sau}\\ q=-1 \text{ fals}\end{cases}$

$\Rightarrow p+q+pq\neq -1, \forall p\neq -1, q\neq -1$

$E_7) \Rightarrow X(p)\cdot X(q)\in G$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, găsiți elementele inversabile din $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$

E_1) elementele inversabile dintr-un inel sunt elementele inversabile referitoare la cea de-a doua lege

E_2) z inversabil $\Rightarrow \exists z'\in\mathbb{Z}[i]$ astfel încât

$$z\cdot z'=z'\cdot z=e$$

E_3) el. neutru la „$\cdot$" este $e=1\Rightarrow z\cdot z'=z'\cdot z=1$

E_4) $\cdot$ comutativă în cas general, e suficient doar $z\cdot z'=1$

E_5) Fie $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{Z}$ și $z'=a'+b'i$ cu $a',b'\in\mathbb{Z}$

Studiem pentru ce a,b din $\mathbb{Z}$ rezultă $a',b'\in\mathbb{Z}$

E_6) Din $z\cdot z'=1\Rightarrow (a+bi)(a'+b'i)=1$

E_7) Dacă încercăm să găsim a', b' e complicat, noua ne trebuie o condiție verificată de a și b

E_8) Din $(a+bi)(a'+b'i)=1 \mid\mid \ldots \mid$

$$\Rightarrow |(a+bi)(a'+b'i)|=|1|\Rightarrow |a+bi|\,|a'+b'i|=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{(a')^2+(b')^2}=1 \mid ()^2\Rightarrow (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=1$$

E_9) Dar, $a,b\in\mathbb{Z}$, $a',b'\in\mathbb{Z}$ și din relația de mai sus, ținând cont că (a^2+b^2) și $(a'^2+b'^2)$ sunt pozitive

$\Rightarrow a^2+b^2=1$. Cum $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

E_{10}) $a^2=0$, $b^2=1\Rightarrow a=0$, $b=\pm 1\Rightarrow z=0\pm i$ sau

$2\cdot 1^2=0\Rightarrow a=\pm 1$, $b=0\Rightarrow z=\pm 1+0\cdot i$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că funcția $f: \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7, +)$

E_1) $f: A \to B$ automorfism $\Leftrightarrow$
1) $A = B$
2) f morfism
3) f bijectivă

E_2) $f(x) = \hat{2}x$ automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7, +)$
$f: \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ (din ipoteză) $\Rightarrow$ cond. 1) îndeplinită

E_3) f morfism $\Leftrightarrow f(x+y) \overset{(?)}{=} f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_7$

$f(x+y) = \hat{2}(x+y)$
$f(x) + f(y) = \hat{2}x + \hat{2}y$
$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$

E_4) f bijectivă

$\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x) = y$ are soluție unică $x \in D_f$

$\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x) = y \Leftrightarrow \hat{2}x = y \mid \cdot_s \hat{2}^{-1}$

E_5) Pt. a găsi $\hat{2}^{-1}$, ne uităm în tabla corespunzătoare lui $\hat{2}$:

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$

$\Rightarrow \hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{1} \Rightarrow \hat{2}^{-1} = \hat{4}$

E_6) Așadar, $\hat{2}x = y \mid \cdot_s \hat{4} \Rightarrow x = \hat{4}y \in \mathbb{Z}_7$

și e sol. unică $\Rightarrow f$ bijectivă (3)

și f biject. $\Rightarrow f$ automorf. al $(\mathbb{Z}_7, +)$

Fie $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}; \hat{4}; \hat{5}; \hat{6}\}$ și

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$

Arătați că $\nexists$ morfism de grupuri

$f: (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ cu $f(\bar{2}) = \hat{3}$

E_1) Pentru a nu confunda â din $\mathbb{Z}_7$ cu â din $\mathbb{Z}_6$, elementele din $\mathbb{Z}_6$ se notează $\bar{a}$

adică în $\mathbb{Z}_7$: $\hat{1} = \{\ldots; 1; 8; 15; \ldots\}$

în $\mathbb{Z}_6$; $\bar{1} = \{\ldots; 1; 7; 13; \ldots\}$

E_2) (R.A.) Pp. $\exists$ morfism $f: (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$

cu $f(\bar{2}) = \hat{3}$ adică: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

E_3) Dacă f mor de grupuri $\Rightarrow$ ca proprietate

$f(e_1) = e_2 \Rightarrow f(\bar{0}) = \hat{1}$ (*)

E_4) Din ip $\Rightarrow f(\bar{2}) = \hat{3}$

E_5) $f(\bar{0}) = f(\bar{6}) = f(\bar{2} + \bar{2} + \bar{2}) \overset{\text{mor.}}{=\!=}$

$= f(\bar{2}) \cdot f(\bar{2}) \cdot f(\bar{2}) = \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \overset{\mathbb{Z}_7}{=\!=} \hat{27}$

$=\!= \hat{6} \neq \hat{1}$

$\lightning$ Li cu (*) $\Rightarrow \nexists$ morfism

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $\nexists$ morfisme de inele de la $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, unde $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

E_1) Chiar dacă nu se precizează legile de la inele, se subînțelege că inelele sunt $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ și $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}],+,\cdot)$

E_2) (R.A.) Pp. $\exists f: \mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ morfism de inele $\Rightarrow$ condiție necesară (dar nu și suficientă) este ca $f(0)=0$
$f(1)=1$

E_3) Pentru a obține o contradicție, calculăm
$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=1+1\Rightarrow f(2)=2$

E_3) Dar, $f(2)=f((0+1\sqrt{2})(0+1\sqrt{2}))=f(\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{2})$
$=(f(\sqrt{2}))^2$

E_4) Din egalitate $\Rightarrow (f(\sqrt{2}))^2=2\Rightarrow$
$f(\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}$

E_5) Dar, $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, ar trebui ca $f(x)\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $\forall x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ și $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$
$\Rightarrow$ contradicție

Obs.: s-a folosit că $f:(A,*,\circ)\to(B,T,\perp)$ morfism $\Rightarrow$ proprietate: $f(x*y)=f(x)\,T\,f(y)$
$f(x\circ y)=f(x)\perp f(y)$

$f(e_*)=e_T$ și $f(e_\circ)=e_\perp$

Prof. Ovidiu Bârsan