MULȚIMEA CLASELOR DE RESTURI MODULO n, $\mathbb{Z}_n$. OPERAȚII, ECUAȚII, SISTEME DE ECUAȚII

Calculați:

1) a) $\hat{3}\cdot\hat{2}-\hat{5}+\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_6$

b) $\hat{3}\cdot\hat{7}+\hat{2}\cdot\hat{3}-\hat{4}\cdot\hat{5}-\hat{6}\cdot\hat{7}$ în $\mathbb{Z}_8$

c) $\hat{2}\cdot\hat{1}-\hat{4}\cdot\hat{5}-\hat{2}\cdot\hat{7}$ în $\mathbb{Z}_8$

d) $\hat{3}\cdot\hat{2}+\hat{4}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{2}\cdot\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_6$

2) a) $\hat{3}\cdot\hat{4}\cdot\hat{3}-\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}\cdot\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$

b) $\hat{7}\cdot\hat{2}-\hat{4}\cdot\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_8$

c) $\hat{4}\cdot\hat{2}-\hat{8}\cdot\hat{9}$ în $\mathbb{Z}_{10}$

d) $\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{4}\cdot\hat{3}+\hat{6}\cdot\hat{7}$ în $\mathbb{Z}_5$

Rezolvați:

3) a) $\hat{2}+\hat{5}x=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_6$

b) $\hat{3}+\hat{2}x=x+\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_5$

4 a) $\hat{8}+\hat{7}x=\hat{8}x+\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_9$

b) $\hat{4}+x=\hat{5}x+\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_6$

5 a) $\hat{2}+x=\hat{6}x+\hat{7}$ în $\mathbb{Z}_{10}$

b) $x^3=x$ în $\mathbb{Z}_6$

6 a) $x^2-\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_4$

b) $x^2-1=0$ în $\mathbb{Z}_8$

7 a) $x^2=x$ în $\mathbb{Z}_6$

b) $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$

8 a) $x^4=x$ în $\mathbb{Z}_6$

b) $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_4$

9 a) $\hat{4}x-\hat{5}y=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_6$

b) $\hat{2}x+y=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_3$

Rezolvați:

10) $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{3}\\ \hat{4}x+\hat{2}y=\hat{3}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$

11) $\begin{cases}\hat{4}x+\hat{3}y=\hat{5}\\ \hat{2}x+\hat{5}y=\hat{7}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_8$

12) $\begin{cases}\hat{5}x+\hat{7}y=\hat{0}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{10}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_{12}$

13) $\begin{cases}\hat{3}x+\hat{5}y=\hat{5}\\ \hat{2}x+y=\hat{5}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_6$

14) $\begin{cases}\hat{3}x+y=\hat{5}\\ \hat{2}x+\hat{4}y=\hat{2}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_8$

15) $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{6}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_7$

16) $\begin{cases}\hat{3}x+y=\hat{1}\\ x+\hat{2}y=\hat{3}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_4$

17) $\begin{cases}\hat{3}x+y=\hat{1}\\ x+\hat{2}y=\hat{3}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$

18) Calculați suma elementelor din $\mathbb{Z}_{21}$

19) Se cere $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\hat{7}$ în $\mathbb{Z}_8$

20) Calculați $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\hat{20}$ în $\mathbb{Z}_{21}$

21) Arătați că $a^5=a$ în $\mathbb{Z}_5$,

22) $f\in\mathbb{Z}_6[X]$, $f=X^3+(\hat{2}a+\hat{1})X\cdot a+\hat{4}$

Se cere $a\in\mathbb{Z}_6$ a.î. $f(\hat{2})=\hat{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\mathbb{Z}_{21} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \hat{20}\}$ inelul claselor de resturi modulo 21

Calculați suma elementelor inelului

$E_1)$ $S = \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \ldots + \hat{20}$

$E_2)$ apar mulți termeni, încercăm gruparea lor $\Rightarrow$ $S = \hat{0} + (\hat{1}+\hat{20}) + (\hat{2}+\hat{19}) + \ldots + (\hat{9}+\hat{12}) + (\hat{10}+\hat{11})$

$E_3)$ $S = \hat{0} + \hat{0} + \ldots + \hat{0} = \hat{0}$

Obs.: Era greșit să scrieți $S = \hat{1} + \hat{2} + \ldots + \hat{20} = \frac{\hat{20} \cdot \hat{21}}{2}$ pt că formula $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se folosește doar pentru numere, nu pentru clase de resturi

Prof. Ovidiu Bădescu

Se cere: $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \hat{7}$ în $\mathbb{Z}_8$.

E_1) $N = \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7}$

$N = \hat{8} \cdot \hat{3} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7}$

E_2) Dar, în $\mathbb{Z}_8 \Rightarrow \hat{8} = \hat{0} \Rightarrow N = \hat{0}$

Obs.: Dacă se cerea: $N = \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6}$ în $\mathbb{Z}_7$

$N = \hat{6} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \Rightarrow N = \hat{24} \cdot \hat{30}$

Dar, $\hat{24} = \hat{3}$ în $\mathbb{Z}_7$

$\hat{30} = \hat{2}$ în $\mathbb{Z}_7$

$N = \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{6} \in \mathbb{Z}_7$

Prof. Ovidiu Bădescu

În $\mathbb{Z}_{21} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{20}\}$, calculați

$\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot \hat{20}$

$E_1)$ $P = \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \hat{20}$

$E_2)$ Scriem în $\mathbb{Z}_{21}$, căutăm factori care înmulțiți să dea 21 (știm că $a \cdot b = \hat{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b = \hat{0} \Rightarrow P = \hat{0}$

$E_3)$ $P = (\hat{3} \cdot \hat{7}) \cdot (\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{8} \cdot \hat{9} \cdot \dots \cdot \hat{20})$

$P = \hat{21} \cdot (\dots\dots\dots)$

$P = \hat{0}$

Prof. Ovidiu Băgesu

Arătați că $a^5 = a, \forall a \in \mathbb{Z}_5$

$E_1)$ $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}; \hat{4}\}$

$E_2)$ $a = \hat{0} \Rightarrow a^5 = \hat{0}^5 = \hat{0} \Rightarrow \hat{0}^5 = \hat{0}$

$a = \hat{1} \Rightarrow a^5 = \hat{1}^5 = \hat{1} \Rightarrow \hat{1}^5 = \hat{1}$

$a = \hat{2} \Rightarrow a^5 = \hat{2}^5 = \hat{32} \overset{\mathbb{Z}_5}{=\!=} \hat{2} \Rightarrow \hat{2}^5 = \hat{2}$

$a = \hat{3} \Rightarrow a^5 = \hat{3}^5 = \hat{3}^2 \cdot \hat{3}^2 \cdot \hat{3} = \hat{9} \cdot \hat{9} \cdot \hat{3} \overset{\mathbb{Z}_5}{=\!=} \hat{4} \cdot \hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{48} =$

$\Rightarrow \hat{3}^5 = \hat{3}$

$a = \hat{4} \Rightarrow a^5 = \hat{4}^5 = \hat{4}^2 \cdot \hat{4}^2 \cdot \hat{4} = \hat{16} \cdot \hat{16} \cdot \hat{4} \overset{\mathbb{Z}_5}{=\!=} \hat{1} \cdot \hat{1} \cdot \hat{4} = \hat{4}$

$\Rightarrow \hat{4}^5 = \hat{4}$

$E_3)$ Așadar, $\forall a \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow a^5 = a$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f \in \mathbb{Z}_6[X]$, $f = X^3 + (\hat{2}a + \hat{1})X + a + \hat{4}$

Găsiți $a \in \mathbb{Z}_6$ dacă $f(\hat{2}) = \hat{0}$

E1) $f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow \hat{2}^3 + (\hat{2}a + \hat{1})\hat{2} + a + \hat{4} = \hat{0}$

$\hat{8} + \hat{4}a + \hat{2} + a + \hat{4} = \hat{0}$

E2) Dar, în $\mathbb{Z}_6 \Rightarrow \hat{8} = \hat{2}$ (scădem 6)

$\Rightarrow \hat{2} + \hat{5}a + \underbrace{\hat{6}}_{\hat{0}} = \hat{0}$

$\Rightarrow \hat{5}a + \hat{2} = \hat{0} \Rightarrow \hat{5}a = -\hat{2}$

E3) Dar, în $\mathbb{Z}_6 \Rightarrow -\hat{2} = \hat{4}$ (adunăm 6)

$\Rightarrow \hat{5}a = \hat{4}$

E4) Facem din tabelă doar linia lui $\hat{5}$

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\Rightarrow$ ecuația $\hat{5}a = \hat{4}$ are doar soluția $a = \hat{4}$

Prof. Ovidiu Badescu