Data:

CLASA A XII-A

SETUL 4
ANALIZĂ XII, partea 2

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar 2017-2018

STUDIEREA DACĂ O FUNCȚIE E INTEGRABILĂ

TEOREMA LUI LEIBNIZ-NEWTON

INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

INTEGRALE RECURENTE

PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

INTEGRALA DIN FUNCȚIA INVERSĂ

SUME RIEMANN, CALCULUL LIMITELOR DE ȘIRURI

PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALELOR DEFINITE

TEOREMA DE MEDIE

DERIVAREA INTEGRALELOR DEFINITE

CALCULUL ARIILOR ȘI AL VOLUMELOR

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

~~M2~~ DEFINIȚIA INTEGRABILITĂȚII (N2)

A) noțiuni necesare:

1) diviziune pt $[a,b]$ este o mț de pct $\Delta=(a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b)$

2) diviziune echidistantă: distanța între 2 pct consecutive ale diviziunii e aceeași

3) norma diviziunii: maximul diferenței între 2 pct consecutive, adică $\|\Delta\|=\max(x_i-x_{i-1})$

4) sistem de pct intermediare $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$

5) suma Riemann asociată f, diviziunii Δ și sist de pct intermed ξ_k

$$S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

B) f integrabilă Riemann (sau pe scurt f integrabilă) pe $[a,b]\Leftrightarrow$ $\forall\Delta$ diviziune pt $[a,b]$ cu $\|\Delta\|\to 0$ și $\forall\xi_k$ sist de pct intermediare $\Rightarrow\exists\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_f\in\mathbb{R}$ și în acest caz notăm $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_f$

C) aplicații practice:

dacă f pozitivă $\Rightarrow\int_a^b f(x)dx$ este aria subgraficului lui f, iar în caz general, aria subgraficului lui f este $\int_a^b|f(x)|dx$

Ex 1: pt $[1;3]\Rightarrow$

$\Delta_1=(1<1,2<1,9<3)$ e diviziune

$\Delta_2=(1<1,3<2,9)$ nu e diviziune

Ex 2: pt $[1;3]\Rightarrow$ diviziunea:

$\Delta_1=(1<1,5<2<2,5<3)$ e echidistantă

$\Delta_2=(1<2<2,5<3)$ nu e echidistantă

Ex 3: pt $\Delta=(2<2,9<3)\Rightarrow$

$\xi_1=(2,8;\ 2,91)$ e sist de pct interm

$\xi_2=(2,9;\ 2,93)$ e sist de pct interm

$\xi_3=(2,4;\ 2,8)$ nu e sist de pct interm

Ex 4: pt $f:[1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$, pt $\Delta=(1<1,8<2,4<3)$ și $\xi_k=(1;\ 2;\ 2,5)$

$$\Rightarrow S_f=\sum_{k=1}^{3} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=$$

$$=f(1)(1,8-1)+f(2)(2,4-1,8)+f(2,5)(3-2,4)=$$

$$=3\cdot 0,8+5\cdot 0,6+6\cdot 0,6=9$$

Ex 5: Fie $f:[1;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3$. Arătați că f integrabilă pe $[1;5]$

E_1) $\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k$ sist de pct interm

$$S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} 3(x_k-x_{k-1})=$$

$$=3(x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1})=$$

$$=3(x_n-x_0)=3(5-1)=12\to 12\in\mathbb{R}$$

$E_2)\Rightarrow\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k$ sist de pct interm

$\Rightarrow S_f\to 12\Rightarrow$ f integrabilă pe $[1;5]$ și $\int_1^5 f(x)dx=12$

Ex 6: $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Studiați dacă f integrab pe $[0;1]$

E_1) $\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k\in\mathbb{Q}$ sist pct interm

$$\Rightarrow S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} 1(x_k-x_{k-1})=$$

$$=\dots=1-0=1\to 1$$

$E_2)$ $\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sist pct interm

$$\Rightarrow S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')(x_k-x_{k-1})=\sum 0(x_k-x_{k-1})=0$$

$\Rightarrow\nexists\lim S_f\Rightarrow f$ nu e integr pe $[0;1]$

CRITERII DE STUDIERE A INTEGRABILITĂȚII

(N1)

Cel mai des folosite sunt:

1) f cont pe $[a,b] \Rightarrow f$ integ pe $[a,b]$

2) f mărg. pe $[a,b] \Rightarrow f$ NU E integ pe $[a,b]$

3) f integrabilă și $g \neq f$ în număr finit de pct $\Rightarrow g$ integrab și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

4) f mărg și discontinuă în nr. finit de pct $\Rightarrow f$ integrabilă

Obs1.: f cont $\Rightarrow f$ are primit

Obs2: f cont $\Rightarrow f$ integrabilă

Obs3.: f are primit $\not\Rightarrow f$ cont

Obs4: f integrab $\not\Rightarrow f$ cont

Obs5.: f are primit, f integrabilă $\Rightarrow f$ continuă

Exp1: $f:[1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 2\\ x+2, & x>2\end{cases}$

Studiați dacă f integrabilă pe $[1;3]$

E1) f cont pe $[1;2)\cup(2;3]$ ca fct elem

E2) Studiem dacă f cont în $x=2$

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 2x=4$

$l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x+2)=4$

$f(2)=4$

$\Rightarrow f$ cont în $x=2$

E3) $\Rightarrow f$ cont pe $[1;3]\Rightarrow f$ integrab pe $[1;3]$

Exp2: $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$

Studiați dacă f integrab pe $[0;1]$

E1) f cont pe $(0;1]$, studiem dacă f cont în $x=0$

E2) $l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \quad \frac{1}{0^+}=\infty$

și $f(0)=0 \Rightarrow f$ nu e cont în $x=0$

E3)

x	$[0$	$1]$
$f(x)$	$0\nearrow\infty$	$1]$

Obs. că f nemărginită $\Rightarrow f$ nu e integrabilă pe $[0;1]$

Exp3: $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 3, & x=0\end{cases}$

E1) $l_d(0)=0$, $f(0)=3\Rightarrow f$ nu e cont în $x=0$

E2) deoarece $\sin x\in[-1;1]$ și $f(0)=3\Rightarrow f$ mărginită

E3) f mărginită, f discont doar în $x=0$ $\Rightarrow f$ integrabilă

T. LEIBNIZ-NEWTON

f continuă și F primitivă a lui f ⇒

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Exp: calculați $\int_2^3 x^3\,dx$

E1) $f(x) = x^3$, $f:[2,3] \to \mathbb{R}$ ⇒ f continuă

⇒ f are primitive, $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

E2) $$\int_2^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81-16}{4}$$

Obs1: nu se scade dacă apare direct E2)

Obs2: Niciodată la integrale definite (apar capete) nu se pune constanta

CALCULAREA INTEGRALELOR UNOR FUNCȚII DEFINITE PRIN ACOLADĂ

- Se folosește: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$

unde $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le c \\ f_2(x), & x > c \end{cases}$

Exemplu: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1+\sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$

Se cere: $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$

$E_1)\ I = \int_{-1}^{\pi} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_0^{\pi} (1+\sin x)dx$

$E_2)\ I = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + (x - \cos x)\Big|_0^{\pi} =$

$= 0 - \frac{(-1)^4}{4} + \pi - \cos\pi - (0 - \cos 0)$

$= -\frac{1}{4} + \pi + 1 + 1 = \frac{4}{2} - \frac{1}{4} + \pi = \frac{7}{4} + \pi$

INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

Se cere: $I = \int_a^b f \cdot g' \, dx$

E_1) $f(x) = \ldots \Rightarrow f'(x) = \ldots$

$g'(x) = \ldots \Rightarrow g(x) =$ direct sau $g(x) = \int g'(x) dx$

E_2) $I = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx$

Ex: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

E_1) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$

E_2) $I = x^2 \cdot (-\cos x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx$

$I = -\left(\pi^2 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} - (-\pi)^2 \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} \right) + 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx$

$I = -(-\pi^2 + \pi^2) + 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx$

E_3) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow I = 2 \left(x \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \right.$

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x \qquad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx \right)$

$= 2 \left(\pi \sin \pi - (-\pi) \underbrace{\sin(-\pi)}_{0} + \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$

$= 2 \left[\pi \sin \pi + \cos \pi - \cos(-\pi) \right] = -1 + 1 =$

PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ (INTEGRALE DEFINITE)

E_1) se notează o expresie ce depinde de x cu t astfel încât derivata a ceea ce notez cu t apare în integrală (la numărător)

E_2) derivez relația $\Rightarrow dt = (\dots)' dx$

E_3) schimb capetele, adică $x = a \Rightarrow t = t_1$

$x = b \Rightarrow t = t_2$

E_4) $I(t) = \int_{t_1}^{t_2} \dots\dots dt$, care se calculează

Exp: Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

E_1) $t = \sin x \,|\,(\,)' \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

E_2) $x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

E_3) $I = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{t}{1} \Big|_0^1 =$

$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$

INTEGRALĂ DIN FUNCȚIA INVERSĂ

Se cere $\int_a^b f^{-1}(x)\,dx$

E_1) not $f^{-1}(x) = t \Leftrightarrow x = f(t) \mid (\,)'$

$\Rightarrow dx = f'(t)\,dt$

E_2) schimb capetele:

$x = a \Rightarrow f(t) = a$, obs. că $t = t_1$ soluție, f biject $\Rightarrow t = t_1$ soluție unică

$x = b \Rightarrow f(t) = b$, obs. că $t = t_2$ soluție, f biject $\Rightarrow t = t_2$ soluție unică

E_3) Se obține o integrală care se rezolvă

Ex: $f(x) = x + \ln x$, se cere

$\int_1^{1+e} x f^{-1}(x)\,dx$

E_1) $f^{-1}(x) = t \Leftrightarrow x = f(t) \mid (\,)' \Rightarrow dx = f'(t)dt$

E_2) $x = 1 \Rightarrow f(t) = 1 \Rightarrow t + \ln t = 1 \Rightarrow t = 1$ sol. unică

Obs. că $t = 1$ soluție, f biject

Arelos, $x = 1+e \Rightarrow t + \ln t = 1 + e \Rightarrow t = e$

$\Rightarrow \int_1^e f'(t)dt = \int_1^e (t+\ln t)\cdot t \cdot (1+\frac{1}{t})$

CALCULAREA LIMITELOR DE ȘIRURI CU AJUTORUL INTEGRALELOR

(M2) (N2)

E_1) se scrie suma ca sumă de termen general

E_2) se dă factor comun la termenul general a.î. să obținem ca și argument al sumei pe $\frac{k}{n}$ și să putem da factor la sumă pe $\frac{1}{n}$ (nu are voie să apară la termenul general nici k izolat, nici n izolat ci grupat $\frac{k}{n}$)

E_3) se consideră $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)$ egal cu termenul general al sumei unde notăm $\frac{k}{n}=x$

E_4) fie Δ diviziune pt $[0;1]$ sub forma $\Delta=(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n}{n})$ cu $\|\Delta\|=\frac{1}{n}\to 0$ și $\xi_k=\frac{k}{n}$ sistem de puncte intermediare

E_5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\int_0^1 f(x)\,dx$, integrală care se calculează

Obs.: se poate folosi direct că $\lim\limits_n \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\dots+f(\frac{n}{n})\right)=\int_0^1 f(x)dx$ de unde deducem că $\lim\limits_n \frac{1}{n}\left(f'(\frac{1}{n})+f'(\frac{2}{n})+\dots+f'(\frac{n}{n})\right)=\int_0^1 f'(x)dx=$
$=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)$

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

E_1) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$

$=\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$

E_3) Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

E_3) Fie $\Delta=(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n}{n})$ o diviziune pt $[0;1]$ cu $\|\Delta\|=\frac{1}{n}\to 0$ și ξ_k sistem de puncte intermediare

E_4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=$

$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=$

$=\ln(1+\sqrt{2})-\ln 1=\ln(1+\sqrt{2})$

PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALELOR DEFINITE ($a<b$) (N2)

1) $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

2) a) $f(x)<g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$

b) $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

c) $f(x)\le g(x)$ și $\exists$ interval $\subset[a,b]$ pe care $f(x)<g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$

3) a) $f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

b) $f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

c) $f(x)\ge 0$ și $\exists$ interval $\subset[a,b]$ pe care $f(x)>0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$

(analog pentru $f(x)<0$ sau $f(x)\le 0$)

4) $m\le f(x)\le M \Rightarrow m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

$m<f(x)<M \Rightarrow m(b-a)<\int_a^b f(x)\,dx<M(b-a)$

5) $[c,d]\subset[a,b]$ și f pozitivă $\Rightarrow \int_c^d f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$

6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ cu c nu neapărat între a și b

7) $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

8) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

9) f pară $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

f impară $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Exm 1: $\int_2^3 (2x-1)\,dx = 2\int_2^3 x\,dx - \int_2^3 1\,dx =$

$= 2\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 - x\Big|_2^3 = (9-4)-(3-2) = 4$

Exm 2: dacă $\ln(1+x)\le x$ și $\ln(1+x)=x$ doar pt $x=0$, să se arate că $\int_0^2 f(x)\,dx < 2$

E_1) $\ln(1+x)\le x$ pe $[0;2]$ și $\exists [1;2]\subset[0;2]$ cu $\ln(1+x)<x \Rightarrow \int_0^2 \ln(1+x)\,dx < \int_0^2 x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow I < \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \Rightarrow I<2$

Exm 3: să se arate că $\int_1^2 e^{-x^2}\,dx > 0$

E_1) cum $a^x>0$, $\forall a>0$ și $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$e^{-x^2}>0 \mid \int_1^2 \cdots dx \Rightarrow \int_1^2 e^{-x^2}\,dx > \int_1^2 0\,dx$

$\Rightarrow I>0$

Exm 4: $f:[1;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+2$, să se arate $16\le \int_1^5 f(x)\,dx \le 528$

E_1) calculăm m și M, pt extrem

$f'(x)=3x^2+1$, $f'(x)=0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ ↗

E_2)

x	1		5
f'		$+$ $+$ $+$	
f	4	↗	132

$f(1)=4$; $f(5)=125+5+2=132$

E_3) $4\le f(x)\le 132 \mid \int_1^5 \cdots dx$

$\Rightarrow \int_1^5 4\,dx \le I \le \int_1^5 132\,dx \Rightarrow$

$4(5-1)\le I\le 132(5-1) \Rightarrow 16\le I\le 528$

Exm 5: calculați $\int_{-8}^{8} \frac{x^5\cdot\cos x}{x^2+1}\,dx$

E_1) $f:[-8;8]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^5\cdot\cos x}{x^2+1}$

E_2) D_f simetric, $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f$ impară

$\Rightarrow I=0$

DETERMINAREA RELAȚIILOR DE RECURENȚĂ PENTRU (N3)

$$I_n = \int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^n dx$$

$E_1)$ $f(x) = (ax^2+bx+c)^n \Rightarrow f'(x) = n(ax^2+bx+c)^{n-1} \cdot (2ax+b)$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

$E_2)$ $I_n = \underbrace{x \cdot (ax^2+bx+c)^n \Big|_\alpha^\beta}_{N_1} - n\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}(2ax^2+bx)dx$

N_1, numărul, de dorit e zero

$E_3)$ Parantesa $2ax^2+bx$ o scriem sub forma $2(ax^2+bx+c) - bx - 2c$ la care, pentru ușurința înțelegerii teoriei de aici, notăm

$2ax^2+bx = 2(ax^2+bx+c) + mx + n$

$E_4)$ $I_n = N_1 - n\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}\left[2(ax^2+bx+c)+mx+n\right]dx$

$I_n = N_1 - n\left(2\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^n dx - n\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}(mx+n)dx\right.$

$I_n = N_1 - 2nI_n - n\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}(mx+n)\,dx$

$E_5)$ Parantesa $mx+n$ o scriem ca derivata lui ax^2+bx+c astfel: $mx+n = m\left(x+\frac{n}{m}\right) = \frac{m}{2a}\left(2ax+\frac{n\cdot 2a}{m}\right) = \frac{m}{2a}\left(2ax+b+\frac{2an}{m}-b\right)$

$= f(2ax+b+p)$

$E_6)$ $I_n + 2nI_n = N_1 - n\cdot\frac{m}{2a}\left(\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}(2ax+b+p)dx\right.$

$I_n(2n+1) = N_1 - \frac{mn}{2a}\left(\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}\cdot(2ax+b)+p\cdot\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}dx\right.$

$I_n(2n+1) = N_1 - \frac{mn}{2a}\left(\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)^{n-1}(2ax+b)+pI_{n-1}\right)$

$E_7)$ Dar, $\int_\alpha^\beta \varphi^{n-1}\cdot\varphi' = \frac{\varphi^n}{n}\Big|_\alpha^\beta \Rightarrow$

$I_n(2n+1) = N_1 - \frac{mn}{2a}\cdot\frac{(ax^2+bx+c)^n}{n}\Big|_\alpha^\beta - \frac{mnp}{2a}I_{n-1}$

(N2) TEOREMA DE MEDIE (N2)

$f:[a;b]\to\mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]\Rightarrow$

$\exists c\in(a;b)$ a.î. $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

Obs: valoarea lui $f(c)$ se numește valoarea medie a integralei și este egală cu

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Exp: $f:[1;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$, arătați că $\exists c\in(1;5)$ pentru care $\int_1^5(x^2+1)dx=4c^2+4$.

E1) $f:[1;5]\to\mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow\exists c\in(1;5)$ a.î.

$$\int_1^5 f(x)dx=f(c)(5-1)$$

E2) $\int_1^5(x^2+1)dx=(x^2+1)\cdot 4$ oder.

E3) valoarea medie a integralei este

$$\frac{\int_1^5(x^2+1)dx}{5-1}=\frac{\frac{x^3}{3}\Big|_1^5+x\Big|_1^5}{4}=\frac{\frac{125-1}{3}+(5-1)}{4}$$

(N2) CUM GĂSIM PRIMITIVELE UNEI (N3) FUNCȚII CONTINUE

E_1) dacă se poate, calculăm direct $\int f(x)dx$

E_2) dacă nu se poate, atunci primitiva este

$$\int_a^x f(t)dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Exp 1: $f(x) = x^3 + x$, să se găsească o primitivă a lui f

E_1) $\int (x^3+x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$

$E_2) \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$ este primitivă a lui f

---

Exp 2: $f(x) = e^{-x^2}$, să se găsească o primitivă a lui f

E_1) $\int e^{-x^2}dx$ nu se poate calcula

$E_2) F(x) = \int_1^x e^{-t^2}dt$ este o primitivă a lui f

sau $F(x) = \int_5^x e^{-t^2}dt$ este o

altă primitivă pentru f

DERIVAREA INTEGRALELOR DEFINITE

TIP I: $\boxed{\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)}$

dar formula se poate aplica doar dacă jos este un număr și sus este x

TIP II $\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)'$, în acest caz avem etapele

E1) f cont $\Rightarrow f$ admite primit, fie F o primit a sa $\Rightarrow (F'(x)=f(x))$

$\Rightarrow$ admite primit, fie $F(x)$ o primitivă a sa $\Rightarrow F'(x)=f(x)$

E2) $\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)' = \left(F(t)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\right)' =$

$= (F(\varphi_2(x)) - F(\varphi_1(x)))' =$

$= F'(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - F'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$

Obs.: se poate reține direct (dar eu nu prefer asta) că

$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)' = F'(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - F'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$

Exemplu 1: $\left(\int_2^x e^{\cos t}dt\right)' = e^{\cos x}$

deoarece jos este 2, sus e x

Exemplu 2: $\left(\int_x^3 e^{\cos t}dt\right)'$ nu putem aplica direct formula dar

$\left(\int_x^3 e^{\cos t}dt\right)' = \left(-\int_3^x e^{\cos t}dt\right)' =$

$= -e^{\cos x}$

Exemplu 3: $\left(\int_{x^2+1}^{2x^3+5} e^{\cos t}dt\right)' = ?$

E1) Fie $f:[x^2+1, 2x^3+5] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\cos t}$ cont pe $[x^2+1, 2x^3+5]$

E2) $\left(\int_{x^2+1}^{2x^3+5} e^{\cos t}dt\right)' = \left(F(t)\Big|_{x^2+1}^{2x^3+5}\right)' =$

$= F'(2x^3+5)(2x^3+5)' - F'(x^2+1)(x^2+1)' =$

$= f(2x^3+5)\cdot 6x^2 - f(x^2+1)\cdot 2x =$

$= e^{\cos(2x^3+5)}\cdot 6x^2 - e^{\cos(x^2+1)}\cdot 2x$

CALCULUL ARIILOR ȘI A VOLUMELOR FOLOSIND INTEGRALELE

(N1)

1) <u>aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=a$ și $x=b$</u> este

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

2) <u>aria dintre G_f, G_g, axa Ox și dreptele $x=a$ și $x=b$</u> este

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Obs.: modulul se explicitează folosind una din metodele:

a) $x\in[a,b]$ și vedem semnul lui $f(x)$

b) tabel de semne

c) grafic

3) <u>volumul corpului generat de f</u>

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Exp 1.: se cere aria dintre G_f, axa Ox, dreptele $x=1$, $x=3$ pt $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

E1) $A=\int_1^3 |f(x)|\,dx=\int_1^3 \left|\frac{x}{x^2+1}\right| dx$

E2) $x\in[1;3]\Rightarrow \frac{x}{x^2+1}\geq 0 \Rightarrow$

$$A=\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_1^3=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 2)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 5$$

Exp 2: se cere aria dintre G_f, G_g $x=1$, $x=3$ pt $f(x)=x^2+2$, $g(x)=3x$

E1) $A=\int_1^3 |f(x)-g(x)|\,dx=\int_1^3 |x^2-3x+2|\,dx$

E2)

x	$[1$		2		$3]$
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

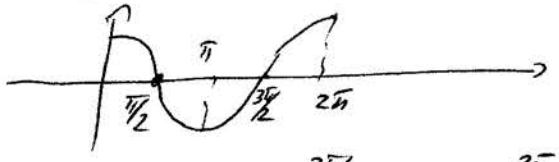
E3) $A=\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx+\int_2^3(x^2-3x+2)\,dx$

$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2x\Big|_1^2+\frac{x^3}{3}\Big|_2^3-3\frac{x^2}{2}\Big|_2^3+2x\Big|_2^3$$

Exp 3: se cere aria dintre $f(x)=\cos x$, dreptele $x=0$ și $x=2\pi$

E1) $A=\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx$

E2)



E3) $A=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx=$

$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}+\sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}=$$

$$=(\sin\pi/2-\sin 0)-(\sin 3\pi/2-\sin\pi/2)+$$

$$+(\sin 2\pi-\sin 3\pi/2)=$$

$$=(1-0)-(-1-1)+(0-(-1))=$$

$$=1+2+1=4$$

Exp 4: se cere volumul corpului generat de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ pt $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

E1) $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1(1-x^2)\,dx$

$$=\pi\left(x\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)=\pi\left(1-0-\left(\frac{1}{3}-0\right)\right)$$

$$=\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$