**Data:**

# CLASA A XII-A

## SETUL 3
## ANALIZĂ XII, partea 1

**Prof. Ovidiu Bădescu**

**Colegiul Național**
**"Traian Lalescu", Reșița**
**An școlar 2017-2018**

**STUDIEREA DACĂ O FUNCȚIE ADMITE PRIMITIVE**

**MONOTONIA PRIMITIVELOR**

**INTEGRAREA NEDEFINITĂ PRIN PĂRȚI**

**INTEGRALE NEDEFINITE RECURENTE**

**PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ**

**A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ**

**INTEGRALE NEDEFINITE RAȚIONALE**

**INTEGRALE NEDEFINITE TRIGONOMETRICE**

**Nivel 0:** **pag**
**Nivel *:** **pag**
**Nivel **:** **pag**
**Nivel ***:** **pag**

**TOTAL:** **pag**

# DEFINIȚIA PRIMITIVELOR (N2)

$f$ admite primitive pe $I \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists F: I \to \mathbb{R}$ cu proprietățile: a) $F$ derivabilă pe $I$

b) $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

Oss1: O $f$ are o infinitate de primitive și oricare două primitive diferă printr-o constantă

Oss2: Mulțimea tuturor primitivelor lui $f$ notează $\int f(x)dx = F(x) + C$, unde $C$ constantă

Exp: Fie $f(x) = x^2$, studiați dacă $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

---

$E_1$) $\exists F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ cu

a) $F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ (pt că e $f$ polinomială)

b) $F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$E_2$) notăm $\int f(x)dx = F(x) + C$, adică

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Obs: În loc de $\frac{x^3}{3} + 5$ puteam găsi $\frac{x^3}{3}$ + orice constantă

# STUDIEREA DACĂ O FUNCȚIE ADMITE PRIMITIVE

$E_1$) $f$ cont $\Rightarrow$ $f$ admite primitive

$E_2$) $f$ are disc I speță (adică $f$ are limite laterale în $x=\alpha$ finite dar $f$ nu e cont în $x=\alpha$) $\Rightarrow f$ nu admite primit

$E_3^*$) $f$ nu are Darboux $\Rightarrow f \notin \mathcal{P}$

$E_4^*$) dacă $\exists F: I \to \mathbb{R}$ derivabilă cu $F'(x)=f(x) \Rightarrow f \in \mathcal{P}$

dacă $\nexists F: I \to \mathbb{R}$ cu $f$ deriv și $F'(x)=f(x) \Rightarrow f \notin \mathcal{P}$

---

Ex 1: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ 5x-2, & x \geq 1 \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

$E_1$) $f$ cont pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,\infty)$

$E_2$) studiem dacă $f$ cont în $x=1$

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}}(2x+1)=3$

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}}(5x-2)=3 \quad f(1)=5\cdot 1-2=3$

$\Rightarrow f$ cont în $x=1$

$E_3$) $f$ cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow f \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$

---

Ex 2: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \leq 3 \\ 5x-2, & x>3 \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

$E_1$) $f$ cont pe $(-\infty;3)$ și pe $(3;\infty)$

$E_2$) studiem dacă $f$ cont în $x=3$

$E_3$) $l_s(3)=7$; $l_d(3)=13, f(3)=7$

$\Rightarrow f$ nu e cont în $x=3$ și $x=3$ pct disc prima speță $\Rightarrow f \notin \mathcal{P}$

---

Ex 3: $f(x)=\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 3, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

$E_1$) $f \notin Db$ (nu are nici lui Darboux) $\Rightarrow f$ nu admite primitive

---

Ex 4: $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x<0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

$E_1$) nu putem calcula $l_s(0)$, deci căutăm o posibilă primit pt $f$, fie $F$

$E_2$) Știm că $\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$E_3$) Fie $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+C_1, & x<0 \\ C_2, & x \geq 0 \end{cases}$

Evident $F_1'(x)=f_1(x)$ și $F_2'(x)=f_2(x)$,

mai trebuie ca $F$ derivabilă $\Leftrightarrow F$ deriv în $x=0 \Rightarrow$ NECESAR $F$ cont în $x=0$

$E_4$) $F_s(0) \overset{0+C_1}{=\!=} C_1$, $F_d(0)=C_2$, $F(0)=C_2$

$\Rightarrow C_1=C_2 \overset{\text{not}}{=\!=} C$

$E_5$) $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+C, & x<0 \\ C, & x \geq 0 \end{cases}$

studiem dacă $F$ deriv în $x=0$

$F_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+C-C}{x}=\lim x\sin\frac{1}{x}=0$

$F_d'(0)=\ldots=0 \Rightarrow F$ deriv în $x=0$

$\Rightarrow f$ admite primit pe $\mathbb{R} \Rightarrow f \in \mathcal{P}$

# RELAȚIA ÎNTRE O FUNCȚIE ȘI PRIMITIVA SA (N1)

a) $F$ primitivă pt $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

b) $F$ primitivă a lui $f \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

---

Obs.: cel mai mult în probleme se folosește relația a)

Exp. 1: Fie $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ și $g(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2x}$. Arătați că $f$ este o primitivă pt $g$.

---

$E_1$) Vom arăta că $f$ derivabilă și că $f'(x) = g(x)$

$E_2$) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ e derivabilă

$E_3$) $f'(x) = (\sqrt{x} + \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2x} = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ primitivă pt $g$

---

Exp 2: Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $F$ este primitivă pt $f$ unde

$f(x) = 1 + \ln(x+1)$, $F(x) = (x+a)\ln(x+b)$

---

$E_1$) $F$ derivabilă evident

$E_2$) $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$((x+a)\ln(x+b))' = 1 + \ln(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \cdot \ln(x+b) + (x+a) \cdot \frac{1}{x+b} = 1 + \ln(x+b)$

$\Leftrightarrow \ln(x+b) + \frac{x+a}{x+b} = 1 + \ln(x+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+b = x+1 \Rightarrow b = 1 \\ \frac{x+a}{x+b} = 1 \Rightarrow x+a = x+b \Rightarrow a = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$ și $\boxed{b=1}$

# CONDIȚIA CA O FUNCȚIE CU ACOLADE SĂ FIE PRIMITIVA UNEI ALTE FUNCȚII

$$\begin{cases} F \text{ derivabilă și} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

Obs: Dacă se cere determinarea unor constante astfel încât $F$ să fie primitiva lui $f$, folosim: $E_1$) $F$ continuă în $x=a$

$E_2$) $F$ derivabilă în $x=a$

$E_3$) $F'(x) = f(x)$

Ex.:
$$F(x) = \begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$a, b = ?$ pentru care $F$ e primitiva unei funcții

$E_1$) $F$ continuă în $x=1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} F(x) = a+b$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} F(x) = 1$ ; $F(1) = 1 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$

$E_2$) $F$ derivabilă în $x=1 \Leftrightarrow F'_s(1) = F'_d(1)$

$$F'_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{ax+b-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}} \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{a}{1} = a$$

$$F'_d(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x + 1 - 1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}} \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$$

$\boxed{a=0, b=1}$

# MONOTONIA, CONVEXITATEA PRIMITIVELOR

Se cere să arătăm că orice primitivă a funcției $f$ este a) strict crescătoare (sau descrescătoare)
b) convexă (sau concavă)

$E_1$) Fie $F(x)$ o primitivă oarecare pt $f(x) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

$E_2$) pt a studia monot lui $F(x)$ studiem semnul lui $F'(x)$ $\Rightarrow$
Dar, $F'(x) = f(x)$
studiem semnul lui $f(x)$

$E_3$) pt a studia convexitatea studiem semnul lui $F''(x)$
Dar, $F'(x) = f(x) \mid ()'$
$\Rightarrow F''(x) = f'(x)$, deci studiem semnul lui $f'(x)$

Obs1.: dacă $F'(x) \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$
dacă $F'(x) \leq 0 \Rightarrow F \searrow$
dacă $F'(x) > 0 \Rightarrow F_{\Delta} \nearrow$
dacă $F'(x) < 0 \Rightarrow F_{\Delta} \searrow$

Obs2.: dacă $F''(x) \geq 0 \Rightarrow F$ convexă
dacă $F''(x) \leq 0 \Rightarrow F$ concavă

---

Exp1: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2-2x}$
Studiați monotonia primitivelor lui $f(x)$

$E_1$) Fie $F(x)$ o primitivă oarecare pt $f(x) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

$E_2$) monot primitivelor $\Rightarrow$ calculăm $F'(x)$
Dar, $F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = e^{x^2-2x}$

$E_3$) $F'(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2-2x} = 0 \Rightarrow$ K.O.
$\Rightarrow F'$ are ac semn pe $\mathbb{R}$

$E_4$)

| $x$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | + | + | + | + | + |
| $F(x)$ | | ↗ | | | |

At a găsi semnul lui $F'(x)$, folosim $e > 0 \Rightarrow e^{x^2-2x} > 0$

---

Exp2: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2-2x}$
Studiați convexitatea primitivelor lui $f(x)$

$E_1$) Fie $F(x)$ o prim. oarecare pt $f(x) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

$E_2$) convexitatea primitivelor $\Rightarrow$ calculăm $F''(x)$
$F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = e^{x^2-2x} \Rightarrow$
$F''(x) = (e^{x^2-2x})' = e^{x^2-2x}(2x-2)$

$E_3$) $F''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x^2-2x} = 0, \text{ K.O.} \\ 2x-2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$E_4$)

| $x$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $F''(x)$ | − − − | 0 | + + + |
| $F(x)$ | ∩ | | ∪ |

$\Rightarrow F$ concavă pe $(-\infty, 1]$
$F$ convexă pe $[1, \infty)$

# TABEL DE PRIMITIVE

1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ a \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

3) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

4) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

9) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

10) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

11) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

12) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

13) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

14) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

15) $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

16) $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$

17) $\int f^n \cdot f' = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$

18) $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$

19) $\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx =$
$= \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int g(x) dx$

20)* $\int f(ax+b) = \frac{\text{formula}}{a} + C$
(nu e obligatorie)

---

Ex 1: $\int (2x^3 + .5\cos x) dx =$
$= 2\int x^3 dx + 5\int \cos x \, dx =$
$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5\sin x + C$

Ex 2: $\int (7\operatorname{tg} x - 5 \cdot 3^x) dx =$
$= 7(-\ln|\cos x|) - 5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$

Ex 3: $\int (x^3 + x + 1)^5 (3x^2 + 1) dx =$
$= \int (x^3 + x + 1)^5 \cdot (x^3 + x + 1)' dx =$
$= \frac{(x^3 + x + 1)^6}{6} + C$

Ex 4: $\int \frac{4x^3 + 1}{x^4 + x} dx = \int \frac{(x^4 + x)'}{x^4 + x} dx =$
$= \ln|x^4 + x| + C$

Ex 5: $\int \cos(5x + 1) dx =$
$= \frac{\sin(3x+1)}{3} + C$

Ex 6: $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx =$
$= \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4} + C$

Obs: $\int \frac{1}{x^3} \neq \ln|x^3| + C$

# DETERMINAREA PRIMITIVELOR UNEI FUNCȚII DATE PRIN ACOLADE



$E_1$) Se arată că $f$ admite primitive (de obicei se arată că $f$ continuă)

$E_2$) Se găsește primitiva pe fiecare ramură și se obține

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x)+C_1, & x\le a \\ F_2(x)+C_2, & x>a \end{cases}$$

$E_3$) Se pune condiția ca $F$ continuă în $x=a \Rightarrow$ legătura între constante și se obține $F(x)$ doar în funcție de $C$

Obs.: Dacă se cere o primitivă cu $F(a)=b$, atunci se înlocuiește și se determină valoarea lui $C \Rightarrow$ $F$ este o funcție care nu depinde de $C$

---

**Exp 1.:** Fie $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$

Găsiți o primit. $F$ pentru $f$

$F(0)=-1$

$E_1$) $f$ cont pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$ ca și fct elementară, studiem dacă $f$ continuă în $x=0$

$E_2$) $l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} x = 0$

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sin x = 0$

$f(0)=0$

$\Rightarrow f$ cont în $x=0$

$E_3$) $\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primit. pe $\mathbb{R}$

$E_4$) $F_1(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_1$

$F_2(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C_2$

$E_5$) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+C_1, & x\le 0 \\ -\cos x+C_2, & x>0 \end{cases}$

$E_6$) $F$ cont în $x=0 \Rightarrow$

$l_s(0)=l_d(0)=F(0) \Rightarrow$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}}\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}}\left(-\cos x+C_2\right)=\frac{0}{2}+C_1$

$\Rightarrow 0+C_1=-1+C_2=0+C_1 \Rightarrow C_2=1+C_1$

$C=1+C$

$E_7$) $\Rightarrow F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+C, & x\le 0 \\ -\cos x+1+C, & x>0 \end{cases}$

$E_8$) Dacă se cerea doar mulțimea primitivelor, atunci problema era rezolvată. Se cere însă o primitivă cu $F(0)=-1$

$E_9$) $\Rightarrow \frac{0^2}{2}+C=-1 \Rightarrow C=-1$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-1, & x\le 0 \\ -\cos x, & x>0 \end{cases}$ este primitiva cerută

# INTEGRAREA PRIN PĂRȚI



Se cere $F(x)=\int f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx$

$E_1$) not $f(x)=f_1(x)\Rightarrow f'(x)=\dots$

$g'(x)=f_2(x)\Rightarrow g(x)=\dots$

$E_2$) $F(x)=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$

Obs 1.: dacă $g(x)$ nu se poate găsi direct, folosim $g(x)=\int g'(x)dx$ care se calculează

Obs 2.: $g'(x)$ se alege astfel încât să putem găsi ușor pe $g$, abia apoi ne gândim dacă pentru $f$ avem alegere. Dacă avem alegere pt $f$, atunci pe $f$ îl alegem astfel încât prin derivare să devină mai simplu

---

Exp 1: Calculați $\int x\cdot \ln x\,dx$

$E_1$) $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}$

$E_2$) $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$

$F(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx$

$F(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C$

Exp 2: Calculați $\int x^2\cdot\sin x\,dx$

$E_1$) $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$

$g'(x)=\sin x\Rightarrow g(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x$

$E_2$) $F(x)=-x^2\cos x+2\underbrace{\int x\cos x\,dx}_{F_1(x)}$

$E_3$) pt $F_1(x)$ alegem

$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=\cos x\Rightarrow g(x)=\int\cos x\,dx=\sin x$

$E_4$) $F_1=x\sin x-\int\sin x\,dx=$

$=x\sin x-(-\cos x)+C=$

$=x\sin x+\cos x+C$

$E_5$) $F=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+C)=$

$=\dots\sin x+2\cos x+C$

# CALCULUL INTEGRALELOR DE TIPUL



$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \;;\; \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \;;\; \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

E1) se amplifică cu conjugatul

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

E2) se desparte în sumă de 2 integrale

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx}_{I_1} - a^2 \cdot \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx}_{I_2}$$

E3) pt $I_1$ alegem

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2}$

E4) pt $I_2$ e formulă

Obs: se folosesc formulele

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

---

**Exemplu 1:** Calculați $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

E1) $I = \int \sqrt{x^2-4}\,dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}\,dx =$

$$= \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx}_{I_1} - 4\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx}_{I_2}$$

E2) pt $I_1$ alegem

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \sqrt{x^2-4}$

E3) $I_1 = x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}\,dx$

$\Rightarrow I_1 = x\sqrt{x^2-4} - I$

E4) $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

E5) $I = I_1 - 4I_2 \Rightarrow$

$I = x\sqrt{x^2-4} - I - 4\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C\right)$

$\Rightarrow 2I = x\sqrt{x^2-4} - 4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-4} - 4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right) + C}$

---

**Exemplu 2:** Calculați $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

E1) $I = \int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

$$= 9\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx}_{I_2}$$

E2) $I_1 = \arcsin\frac{x}{3} + C$

E3) pt. $I_2$ alegem

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\sqrt{9-x^2}$

E4) $I_2 = -x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2}\,dx$

$I_2 = -x\sqrt{9-x^2} + I$

E5) $I = 9I_1 - I_2 \Rightarrow$

$I = 9\left(\arcsin\frac{x}{3} + C\right) - \left(-x\sqrt{9-x^2} + I\right)$

$I = 9\arcsin\frac{x}{3} + C + x\sqrt{9-x^2} - I$

$2I = 9\arcsin\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2} + C$

$\boxed{I = \frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2}\right) + C}$

# INTEGRALE NEDEFINITE (N2)

## RECURENTE

$E_1$) notăm integrala inițială $I_n$, $n \geq \dots$

$E_2$) calculăm prin părți, separăm $\Rightarrow I_n = \dots$ în funcție de $I_{n-1}$ (recurență de ord I), sau $I_n = \dots$ în funcție de $I_{n-2}$ (recurență de ord II) etc

$E_3$) la recurențe de ordin I calculăm prima integrală, la cele de ordin II primele două integrale etc

Ex: $I_n = \int \ln^n x \, dx, \quad n \geq 1$

$E_1$) pentru $I_n = \int \ln^n x \, dx$,

fie $f(x) = \ln^n x \Rightarrow f'(x) = n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

$E_2$) $I_n = \ln^n x \cdot x - \int n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dx$

$I_n = \ln^n x \cdot x - n \cdot \int \ln^{n-1} x \, dx$

$\Rightarrow I_n = \ln^n x \cdot x - n \cdot I_{n-1}$, recurență de ord I, calculăm $I_1$

$E_3$) este recurență

$I_1 = \int \ln x \, dx$

$E_1$) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

$I_1 = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - x + C$

# PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ LA CALCULUL PRIMITIVELOR

(N1)

$E_1$) se notează o expresie ce depinde de $x$ cu $t$ astfel încât derivata a ceea ce notez să apară în integrală la numărător

$E_2$) se derivează relația, se obține $dt = (\dots)' dx$ și se obține $I(t)$, adică o integrală ce depinde doar de $t$

$E_3$) se calculează integrala nou obținută în funcție de $t$, apoi la $I(x)$ înlocuim pe $t$ cu expresia ce depinde de $x$

Obs.: dacă după notație avem o integrală ce depinde și de $x$ și de $t$ $\Rightarrow$ notația nu e bună

---

Exp.: Calculați $\int (2x+1)(x^2+x+5)^7 dx$

$E_1$) not $t = x^2+x+5 \mid (\,)' \Rightarrow$

$dt = (2x+1)dx \Rightarrow$

$E_2$) $I(t) = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C \Rightarrow$

$I(x) = \frac{(x^2+x+5)^8}{8} + C$

---

Exp 2: Calculați $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}} dx$

$E_1$) not $t = x^2 \mid (\,)' \Rightarrow dt = 2x dx$

$\Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$

$E_2$) $I(t) = \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt =$

$= \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2-1} \right| + C$

$E_3$) $I(x) = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + \sqrt{x^4-1} \right| + C$

# A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ



$E_1$) se notează o expresie care depinde de $x$ cu $t$

$E_2$) se găsește $x$ în funcție de $t$

$E_3$) se derivează relația $\Rightarrow dx = (\dots)' dt$

$E_4$) se calculează integrala nou obținută, la rezultat înlocuim pe $t$ cu valoarea cu care l-am notat

Exp: Calculați $\int tg^2 x \, dx$

---

$E_1$) notăm $t = tg\, x \Rightarrow x = arctg\, t \,/()'$

$E_2$) $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$E_3$) $I(t) = \int t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2}{t^2+1} dt$

$E_4$) $I(t) = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int \left( \frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt$

$I(t) = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = t - arctg\, t + C$

$E_5$) $I(x) = tg\, x - arctg\,(tg\, x) + C$

$I(x) = tg\, x - x + C$

# PRIMITIVE PT. FUNCTII RATIONALE SIMPLE

1) $F(x)=\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx$

not $ax+b=t \mid ()' \Rightarrow a\,dx=dt$

$\Rightarrow dx=\frac{1}{a}dt \Rightarrow F(t)=\int \frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{a}dt$

2) $F(x)=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

• forma canonica

E1) $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

E2) $F(x)=\int \frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}}dx$

E3) $x+\frac{b}{2a}=t \mid ()' \Rightarrow dx=dt$

$F(t)=\int \frac{1}{at^2-\frac{\Delta}{4a}}dt=\frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2-\frac{\Delta}{4a}}dt$

care este formula

3) $F(x)=\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx$

• formam la numarator derivata numitorului

E1) $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$

E2) $F(x)=\frac{1}{2a}\int \frac{2ax}{ax^2+bx+c}dx=$

$=\frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}dx=$

$=\frac{1}{2a}\left(\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{F_1(x)}-b\underbrace{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx}_{F_2(x)}\right)$

E3) $F_1(x)=\int \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}dx=$

$=\ln|ax^2+bx+c|+C$, $F_2(x)$ forma canonica

---

Exemplu 1: $F(x)=\int \frac{1}{(3x+5)^7}dx$

E1) $3x+5=t \mid ()' \Rightarrow 3\,dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$

E2) $F(t)=\int \frac{1}{t^5}\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^{-5}dt=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{t^4}+C$

E3) $F(x)=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(3x+5)^7}+C$

---

Exemplu 2: $F(x)=\int \frac{1}{3x^2+7x+5}dx$

E1) $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

E2) $F(x)=\int \frac{1}{3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49-60}{12}}dx$

E3) $x+\frac{7}{6}=t \mid ()' \Rightarrow dx=dt \Rightarrow$

$F(t)=\int \frac{1}{3t^2+\frac{11}{12}}dt=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{11}{36}}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{11}}{6}}+C$

$F(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6t}{\sqrt{11}}+C$

E4) $F(x)=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6\left(x+\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{11}}+C$

---

Exemplu 3: $F(x)=\int \frac{x}{3x^2+7x+5}dx$

E1) $(3x^2+7x+5)'=6x+7$

E2) $F(x)=\frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+7x+5}dx=$

$=\frac{1}{6}\int \frac{6x+7-7}{3x^2+7x+5}dx=$

$=\frac{1}{6}\left(\underbrace{\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+5}dx}_{F_1(x)}-7\underbrace{\int \frac{1}{3x^2+7x+5}dx}_{F_2(x)}\right)$

E3) $F_1(x)=\int \frac{(3x^2+7x+5)'}{3x^2+7x+5}dx=$

$=\ln|3x^2+7x+5|+C$

$F_2(x)=\int \frac{1}{3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49-16}{12}}dx$ care e calculata la exemplul 2

# DESCOMPUNEREA UNEI FUNCȚII RAȚIONALE ÎN FUNCȚII RAȚIONALE SIMPLE (N2)

1) Funcțiile raționale simple sunt: $\frac{A}{(\alpha x+\beta)^n}$ și $\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^n}$ unde $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ constante reale

2) Se cere descompunerea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în funcții raționale simple

$E_1$) dacă $gr\,P(x) < gr\,Q(x)$, se descompune $Q(x)$ în produse de factori de gr I la oricât de multe ori și factori de gr II la oricât de multe ori

$E_2$) se descompune $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în sumă de fracții raționale simple după toți numitorii posibili cu condiția ca dacă numitorul are gr I la orice putere, numărătorul e constantă iar dacă numitorul are gr II la orice putere, numărătorul e de gr I

$E_3$) se aduc acele fracții la același numitor, se egalează coef. pentru aceleași puteri ale lui $x$, se rezolvă sistemul

$E_4$) dacă $gr\,P(x) \geq gr\,Q(x)$, se încearcă scrierea numărătorului în funcție de numitor sau împărțim $P(x)$ la $Q(x)$ și folosim „scoaterea întregilor din fracție" adică $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ cu $gr\,R(x) < gr\,Q(x)$

$E_5$) dacă $\frac{R(x)}{Q(x)}$ nu e fracție rațională simplă, o descompunem cu metoda anterioară

---

Exemplu 1: $\frac{3x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} =$

$= \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x(A+B)+3A+B}{(x+1)(x+3)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 3A+B=2 \end{cases}$

„$-$": $-2A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{3x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{7}{2}}{x+3}$

---

Exemplu 2: $\frac{5x^2+x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$

$E_1$) C. Horner $x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x^2+5x+6)$

$E_2$) $\frac{5x^2+x+4}{(x+1)(x^2+5x+6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5x+6} =$

$= \frac{A(x^2+5x+6)+(x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2+5x+6)} =$

$= \frac{x^2(A+B)+x(5A+B+C)+6A+C}{(x+1)(x^2+5x+6)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 5A+B+C=1 \\ 6A+C=4 \end{cases}$

---

Exemplu 3: $\frac{4x^3+3x^2+5x+1}{(2x+1)^3(x^2+x+1)^2} =$

$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{(2x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$

și aducem la ac. numitor

---

Exemplu 4: $\frac{2x^2+7x+4}{x^2+5}$

$E_1$) $\frac{2x^2+7x+4}{x^2+5} = \frac{2(x^2+5)+7x-6}{x^2+5} =$

$= 2 + \frac{7x-6}{x^2+5}$ și $\frac{7x-6}{x^2+5}$ rad. simplă

---

Exemplu 5: $\frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

$E_1$)
$$\begin{array}{r|l} 2x^2+7x+4 & x+3 \\ \hline -2x^2-6x & 2x+1 \\ \hline x+4 & \\ -x-3 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$E_2$) $\frac{2x^2+7x+4}{x+3} = 2x+1+\frac{1}{x+3}$

# INTEGRALE TRIGONOMETRICE (N2)

1) dacă apar și ($\sin x$ și $\cos x$), se încearcă notația ($t = \sin x$) sau ($t = \cos x$) a.î. derivata a ceea ce notez să apară la numărător

2) dacă $\sin x$ și/sau $\cos x$ apar la puteri pare, folosim

$\boxed{\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{tg^2 x + 1}}$ și $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{tg^2 x + 1}}$ și notăm $tg\, x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \,/()' \Rightarrow$

$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

3) dacă nu merg metodele anterioare, folosim $\boxed{\sin x = \frac{2 tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}}$ și $\boxed{\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}}$

și $tg \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Obs.: prin aceste metode transformăm integralele trigonometrice în integrale raționale care se rezolvă prin metodele de la integrale raționale

---

Exm 1.: $I = \int \frac{\sin x}{2 + \cos^2 x} dx$

$E_1)$ $t = \cos x \,/()' \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$

$\Rightarrow \sin x\, dx = -dt$

$E_2) I(t) = \int \frac{-dt}{2+t^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$

$E_3) I(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + C$

Exm 2: $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - 3 \sin^2 x} dx$

$E_1)$ $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$

$E_2) I(x) = \int \frac{\frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}}{\frac{1}{1 + tg^2 x} - \frac{3 tg^2 x}{1 + tg^2 x}} dx$

$E_3)$ $t = tg x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \,/()' \Rightarrow$

$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$E_4) I(t) = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} - \frac{3t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

$I(t) = \int \frac{t^2}{1 - 3t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

$I(t) = \int \frac{t^2}{(1-3t^2)(1+t^2)} dt$

$E_5) \frac{t^2}{(1-3t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1-3t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$ și de aici e fgd rațională simplă

---

Exm 3: $I = \int \frac{1}{3 + \cos x} dx$

$E_1) \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$

$E_2) I = \int \frac{1}{3 + \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}} dx$

$E_3)$ $t = tg \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \,/()' \Rightarrow$

$dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt$

$E_4) I = \int \frac{1}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$

$= \int \frac{1+t^2}{3 + 3t^2 + 1 - t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$

$= \int \frac{2}{4 + 2t^2} dt = \int \frac{1}{t^2 + 2} dt =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$

$E_5) I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right) + C$

# NOTAȚII CLASICE LA CALCULUL PRIMITIVELOR

(N2)

1) <u>apare $a^x$ sau $e^x$ sau $e^{-x}$</u>, notăm ($t=a^x$) sau ($t=e^x$) sau ($t=e^{-x}$)

2) <u>apar radicali de ordin diferit</u>, găsim cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor și îl notăm cu $t$ radicalul de ordin c.m.m.m.c. găsit anterior

3) <u>apare radical dintr-o expresie</u>, notăm acel radical cu $t$ și vom găsi pe $x$ în funcție de $t$, apoi derivăm

Obs.: prin aceste metode ajungem la integrale raționale care se rezolvă cu metode specifice

---

Ex 1: $\int \frac{2^{-x}}{3+2^{-x}}\,dx$

E1) $t=2^{-x}\,|\,()' \Rightarrow dt=2^{-x}\ln 2\cdot(-1)dx$

$\Rightarrow 2^{-x}dx=-\frac{dt}{\ln 2}$

E2) $I(t)=\int \frac{\frac{-dt}{\ln 2}}{3+t}=-\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{t+3}=$

$=-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{\ln|t+3|}{1}+C$

E3) $I(x)=-\frac{1}{\ln 2}\ln|2^{-x}+3|+C=$

$=-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^{-x}+3)+C$

---

Ex 2: $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

E1) c.m.m.m.c. pt (2,3) este 6

E2) $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\,|\,()'\Rightarrow$

$dx=6t^5dt$

E3) $I=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^5dt}{t^2(t+1)}=$

$=6\cdot\int\frac{t^3}{t+1}dt$ care e rațională

---

Ex 3: $\int\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\,dx$

E1) $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,|\,()^2\Rightarrow t^2=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow$

$t^2x+t^2=x-1\Rightarrow x(t^2-1)=-1-t^2$

$\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{1-t^2}\,|\,()'$ și după calcule

E2) $dx=\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$

E3) $I(t)=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$

care e integrală rațională