Data:

CLASA A XII-A

SETUL 2
ALGEBRĂ XII, partea 2

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar 2017-2018

POLINOAME, GRADUL UNUI POLINOM

OPERAȚII CU POLINOAME, INCLUSIV ÎMPĂRȚIREA

DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR

PROPR. ALE RĂD. DE DEPĂȘESC MULȚ. COEFICIENȚILOR

RĂDĂCINI MULTIPLE

POLINOAME REDUCTIBILE, IREDUCTIBILE

RELAȚIILE LUI VIETE

SUMA PUTERILOR ASEMENEA A RĂDĂCINILOR

STUDIEREA DACĂ UN POLINOM ARE RĂD. REALE

ECUAȚII RECIPROCE

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

POLINOM

- expresie de forma $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ unde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ sunt coeficienți

Obs: Dacă $f \in A[X]$ ⇒ toți coeficienții sunt în A, necunoscuta este X

Exp: $f = \sqrt{3} X^2 + X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ fals pt că ar trebui că $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Z}$

fals pt că $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

Obs 2: f se mai poate scrie și sub forma $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. sau sub orice altă ordonare a termenilor

Exp: $f = 2X + 5X^3 - 2$ polinom

Obs 3: forma algebrică = formele desfășurate ca mai sus

Exp: $f = (2X-1)^3$ nu are forma algebrică

=) forma algebrică $f = 4X^2 - 4X + 1$

Obs 4: forma canonică a unui polinom = ...terile aper descrescător

... Dacă avem termenii numiți MONOM de ... $a \cdot X^k$

PROPRIETĂȚI ALE COEFICIENȚILOR (N2)

Dacă $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

coeficienții sunt: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$

a) suma coeficienților: $f(1)$

b) termenul liber: $f(0)$

c) $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$

d) $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$

Exp: $f(x) = (2x+1)^{2012}$

a) suma coef.

b) termenul liber

c) $a_0 + a_2 + \dots =$

d) $a_1 + a_3 + \dots =$

---

a) $f(1) = (2+1)^{2012} = 3^{2012}$

b) $f(0) = 1^{2012} = 1$

c) $a_0 + a_2 + \dots = \frac{f(1)+f(-1)}{2} = \frac{3^{2012}+1}{2}$

d) $a_1 + a_2 + \dots = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{3^{2012}-1}{2}$

GRADUL UNUI POLINOM

dacă $f \equiv 0$ (identic 0, adică în toate valorile
a lui $X \Rightarrow f(x) = 0$) $\Rightarrow \text{gr } f = -\infty$

dacă $f = k$ (constantă) nenulă $\Rightarrow \text{gr } f = 0$

dacă f are grad $\geq 1 \Rightarrow \text{gr } f$ este puterea maximă
a lui X

Exp: $f = (m^2-1)X^2 + (m-1)X + (m+1)$

$\text{gr } f = ?$

$E_1)$ $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m \in \{-1, 1\}$

$E_2)$ $m = -1 \Rightarrow f = 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0$

$f = 0 \Rightarrow \text{gr } f = -\infty$

$E_3)$ $m = 1 \Rightarrow f = 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 2$

$f = 2 \Rightarrow \text{gr } f = 0$

$E_4)$ Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow m^2 - 1 \neq 0$

$\Rightarrow \text{gr } f = 2$

OPERAȚII CU POLINOAME (N1)

1) adunarea, scăderea, înmulțirea se efectuează ca și operațiile cu expresii

2) împărțirea: la cât se caută un termen care înmulțit cu împărțitorul, să dea primul termen de la deîmpărțit. Rezultatul se trece sub deîmpărțit cu semn schimbat, se adună și se reduce acel termen. Procedeul se repetă până când gradul termenului ce rămâne este mai mic decât gradul împărțitorului

Obs.: împărțirea în $\mathbb{Z}_n$ e la fel, doar că, pentru a ne fi mai ușor, facem linia din tablă și coef. dominant de la împărțitor, iar dacă după reducere rămân coef. negativi, adunăm „n" ca să-i facem pozitivi

---

Exp 1: $f = 2x-1$, $g = x^2-3x+2$, se cere: a) $f+g$ b) $f-g$ c) $f \cdot g$

a) $f+g = (2x-1)+(x^2-3x+2) = x^2-x+1$

b) $f-g = (2x-1)-(x^2-3x+2) = -x^2+5x-3$

c) $f \cdot g = (2x-1)(x^2-3x+2) =$

$= 2x^3-6x^2+4x-x^2+3x-2 =$

$= 2x^3-7x^2+7x-2$

Exp 2: $f = 2x^4-x^3+2x+5$ și $g = x-1$, se cere $f:g$

$2x^4-x^3+2x+5 \;\big|\; x-1$

$-2x^4+2x^3 \qquad 2x^3+2x^2+2x+4$

$2x^3+2x+5$

$-2x^3+2x^2$

$2x^2+2x+5$

$-2x^2+2x$

$4x+5$

$-4x+4$

9

$c(x) = 2x^3+2x^2+2x+4$

$R(x) = 9$

Exp 3: în $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$, se cere $f:g$ unde $f = \hat{2}x^3+\hat{4}x^2+\hat{3}x+\hat{4}$, $g = \hat{3}x+\hat{2}$

E1)

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$

E2) $\hat{2}x^3+\hat{4}x^2+\hat{3}x+\hat{4} \;\big|\; \hat{3}x+\hat{2}$

$-\hat{2}x^3-\hat{3}x^2 \qquad \hat{4}x^2+\hat{2}x+\hat{3}$

$x^2+\hat{3}x+\hat{4}$

$-x^2-\hat{4}x$

$-x+\hat{4}$

$\hat{4}x+\hat{4}$

$-\hat{4}x-\hat{1}$

$\hat{3}$

$C(x) = \hat{4}x^2+\hat{2}x+\hat{3}$

$R(x) = \hat{3}$

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

$f(x) : g(x) = C(x)$ rest $R(x)$ cu

$\text{gr } R(x) < \text{gr } g(x)$

Obs: proba împărțirii:

$$f(x) = g(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Exp: $f(x) = (2x^2 - x - 2)^5$

Se cere restul $f : (x^2 - 1)$

E_1) din probă $\Rightarrow f(x) = (x^2-1)C(x) + R(x)$

cu $\text{gr } R(x) < 2 \Rightarrow R(x) = ax + b$

E_2) $f(x) = (x^2-1)C(x) + ax + b$

E_3) găsim rădăcinile lui (x^2-1)

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ { $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (NORMAL)
sau
cu $\Delta \Rightarrow x_{1,2} = \dots$

E_4) $f(1) = 0 \cdot C(x) + a + b \Rightarrow -1 = a + b$

$f(-1) = 0 \cdot C(x) - a + b \Rightarrow 1 = -a + b$

E_5) $\begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0,\ a = -1$

$\Rightarrow R(x) = ax + b \Rightarrow$

$R(x) = -x + 0$

RESTUL LUI $f:(x-a)$

- restul lui $f:(x-a)$ este $f(a)$
- restul lui $f:(x+a)$ este $f(-a)$

(adică este f de rădăcina polinomului la care împart)

Exp: restul $f:(x+1)=?$, $f(x)=(x+2)^{2010}$

E_1) restul lui $f:(x+1)$ este $f(-1)$

E_2) $f(-1)=(-1+2)^{2010}=1^{2010}=1$

$\Rightarrow$ restul este egal cu 1

CONDIȚIA CA UN NUMĂR SĂ FIE RĂDĂCINĂ PT f

$x=a$ e rădăcină pt $f \Leftrightarrow f(a)=0$
(înlocuit în f ne dă zero)

Exp: $f(x)=x^2-3x+2$
verificați dacă sunt rădăcini numerele

a) $x=2$
b) $x=1$
c) $x=-1$

---

a) $f(2)=2^2-6+2=0 \Rightarrow x=2$ rădăcină

b) $f(1)=1-3+2=0 \Rightarrow x=1$ rădăcină

c) $f(-1)=(-1)^2-3(-1)+2=1+3+2=6\neq 0$
$\Rightarrow x=-1$ nu e rădăcină

DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR

Se folosesc 2 metode:

met I: $g \mid f \Leftrightarrow$ restul lui $f:g$ este zero (g divide pe f) și este echivalent cu (f se citește g divide f)

$f:g \Leftrightarrow$ restul lui $f:g$ este zero (f se citește f divizibil cu g)

met II: toate rădăcinile lui $g(x)$ sunt rădăcini pentru $f(x)$, de același ordin de multiplicitate

Exp: Arătați că (x^4-2x^2+1) este divizibil cu (x^2-1)

met I:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^2 + 1 & x^2-1 \\ \hline -x^4 + x^2 & \\ \hline -x^2+1 & \\ x^2-1 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow$ restul este 0

met II: arătăm că toate rădăcinile lui x^2-1 sunt rădăcini pentru $f=x^4-2x^2+1$

E1) rădăcinile lui $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$

$f(1)=1^4-2\cdot 1^2+1=1-2+1=0$

$f(-1)=(-1)^4-2\cdot(-1)^2+1=1-2+1=0$ $\Big\} \Rightarrow f;g$

T. BEZOUT

$f \vdots (x-a) \Leftrightarrow f(a)=0$

$f \vdots (x+a) \Leftrightarrow f(-a)=0$

Exp: Arătați că $f = x^2 - 7x + 6$ este divizibil cu $g = x-1$

$f(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$

$\Rightarrow f \vdots (x-1)$

Exp 2: arăt. că $f = x^2 + 7x + 6$ este divizibil cu $g = x+1$

$f(-1) = (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$

$\Rightarrow f \vdots (x+1)$

POLINOAME PRIME ÎNTRE ELE

f și g sunt prime între ele $\Leftrightarrow$ c.m.m.d.c. al lor este număr (adică nu depinde de X)

Def c.m.m.d.c. = factori comuni, la putere mică / mare / mic

Exp: $f(X) = 2(X+1)(X-2)$

$g(X) = 4(X+1)^2(X+2)$

c.m.m.d.c. $(f, g) = 2(X+1)$ depinde de $X \Rightarrow$ f și g nu sunt prime între ele

Exp 2: $f(X) = 2(X-1)(X-2)$

$g(X) = 4(X+1)^2(X+2)$

c.m.m.d.c. este 2 număr $\Rightarrow$ f și g sunt prime între ele

PROPRIETĂȚI ALE RĂDĂCINILOR CE DEPĂȘESC MULȚIMEA COEFICIENȚILOR

a) $f \in \mathbb{Q}[X]$ și $x_1 = a+\sqrt{b}$ rad $\Rightarrow x_2 = a-\sqrt{b}$ este rad, $\forall b$ cu $\sqrt{b}$ să nu fie întreg adev. pt că $a+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$

b) $f \in \mathbb{Q}[X]$ și $x_1 = a+bi$ rad $\Rightarrow x_2 = a-bi$ este rad, $\forall b \neq 0$ pt că $a+bi \notin \mathbb{Q}$

c) $f \in \mathbb{R}[X]$ și $a+bi$ rad $\Rightarrow x_2 = a-bi$ este rad, $\forall b \neq 0$ pt că $a+bi \notin \mathbb{R}$

d) $f \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1 = a+\sqrt{b}$ rad $\not\Rightarrow x_2 = a-\sqrt{b}$ este rad pt că $a+\sqrt{b} \in \mathbb{R}$

Ex: Găsiți rad lui $f(X) = X^4 - 5X^2 + 6$ știind că f are rădăcina $x_1 = \sqrt{2}$

E_1) $f \in \mathbb{Q}[X]$ (are coef raționali) și $x_1 = 0+\sqrt{2}$ rad. $\Rightarrow x_2 = 0-\sqrt{2}$ rad $\Rightarrow f \vdots (X-\sqrt{2})$ $f \vdots (X+\sqrt{2})$

E_2) $f \vdots (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}) \Rightarrow f \vdots (X^2-2)$

$X^4 - 5X^2 + 6 \;\big|\; X^2-2$ $\quad X^4 - 5X^2 + 6 = (X^2-2)(X^2-3)$

$X^2 - 3 = 0 \Rightarrow X = \pm\sqrt{3}$

CONDIȚIA CA $x=\alpha$ SĂ FIE RĂDĂCINĂ MULTIPLĂ

(N1)

met I: $x=\alpha$ rad multiplă de ordin k

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ \dots \\ f^{(k-1)}(\alpha)=0 \\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

adică e rad. de k ori

Exp: $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

$x=1$ rad multiplă de ordinul ...

$f(1)=1-3+3-1=0$

$f'(x)=3x^2-6x+3 \Rightarrow f'(1)=3-6+3=0$

$f''(x)=6x-6 \Rightarrow f''(1)=0$

$f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(1)=6\neq 0$

$\Rightarrow x=1$ rad multiplă de ordin 3

met II: $x=\alpha$ rădăcină multiplă de ordin $k \Leftrightarrow f:(x-\alpha)^k$ și $f\not:(x-\alpha)^{k+1}$

Exp: $f(x)=2(x-2)^4(x-5)$, $x=2$ e ord are(?)

$f(x)\vdots(x-2)^4$ și $f\not\vdots(x-2)^5$

$\Rightarrow x=2$ este 4

POLINOAME REDUCTIBILE (IREDUCTIBILE)

f reductibil în $K[X] \Leftrightarrow \exists$ 2 polinoame g, h de grad cel puțin 1 a.î. $f = g \cdot h$

f ireductibil în $K[X] \Leftrightarrow \nexists$ 2 polinoame g și h de grad cel puțin 1 a.î. $f = g \cdot h$

Exp1: $f(x) = (x+1)\cdot(x^2+3)$ e reductibil în $\mathbb{R}[X]$

Exp2: $f(x) = 2\cdot(x+1)$ nu e reductibil în $\mathbb{R}[X]$, e ireductibil în $\mathbb{R}[X]$

Exp3: $f(x) = x^2 - 3$. Stabiliți dacă f e ireductibil în a) $\mathbb{R}[X]$ b) $\mathbb{Q}[X]$

$f(x) = x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$\Rightarrow f$ este reductibil peste $\mathbb{R}[X]$ dar este ireductibil peste $\mathbb{Q}[X]$

PROPRIETĂȚI ALE POLINOAMELOR IREDUCTIBILE (N2)

a) peste $\mathbb{R}$, singurele polinoame ireductibile sunt cele de gr I și de gr II cu $\Delta < 0$

$\Rightarrow$ polinom de grad ≥ 3 sau de gr II cu $\Delta \geq 0$ este reductibil (se poate descompune)

b) peste $\mathbb{C}$, singurul polinom ireductibil este cel de gr I

Exp: $f = X^2 + X + 1$, să se arate că f reductibil în $\mathbb{R}[X]$ (?)

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow f$ ireductibil peste $\mathbb{R}[X]$

Exp 2: $f(X) = X^2 + 1$, studiați dacă f ireductibil

a) în $\mathbb{R}[X]$

b) în $\mathbb{C}[X]$

---

a) pt $\mathbb{R}[X]$, calculăm $\Delta = 0 - 4 < 0 \Rightarrow f$ ireductibil peste $\mathbb{R}[X]$

b) pt $\mathbb{C}[X] \Rightarrow f$ reductibil pt că $\operatorname{gr} f \geq 2$

RELATIILE LUI VIETE

a) Pt gr II: $ax^2+bx+c=0$

$$\begin{cases} S=-\frac{b}{a} \\ P=\frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Pt gr III: $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\begin{cases} S_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ S_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4=\frac{c}{a} \\ S_3=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

c) Pt gr IV: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

$$\begin{cases} S_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a} \\ S_2=x_1x_2+\dots=\frac{c}{a} \\ S_3=x_1x_2x_3+\dots=-\frac{d}{a} \\ S_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a} \end{cases}$$

Ex: $2x^3+5x-7=0$

$$S_1=-\frac{b}{a}=-\frac{0}{2}=0$$

$$S_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$$

$$S_3=-\frac{d}{a}=\frac{7}{2}$$

CALCULAREA SUMEI PĂTRATELOR RĂDĂCINILOR (N1)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = (S_1)^2 - 2S_2$$

Exp: $2x^4 - 4x^3 + 5x + 2 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = ?$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (S_1)^2 - 2S_2$$

$$S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2^2 - 2 \cdot 0 = 4$$

FORMAREA ECUAȚIEI DE GRAD n DACĂ ȘTIM RĂDĂCINILE

(N1)

$$X^n - S_1 X^{n-1} + S_2 X^{n-2} - S_3 X^{n-3} + \ldots = 0$$

Ex: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1$

Se cere ec. de gr III

$E_1) X^3 - S_1 X^2 + S_2 X - S_3 = 0$

$E_2) S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2 - 2 + 1 = 1$

$S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -4 - 2 + 2 = -4$

$S_3 = x_1 x_2 x_3 = 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -4$

$E_3) X^3 - 1 \cdot X^2 + (-4)X - (-4) = 0$

$X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0$

DETERMINAREA SUMEI PUTERILOR ASEMENEA ALE EC. DE GRAD III

E_1) $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ este suma puterilor asemenea

E_2) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = -\frac{b}{a}$

E_3) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

E_4) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, folosim că x_1, x_2, x_3 rad ale ec., le înlocuim în ecuație pe rând, adunăm și folosim sumele anterioare

E_5) $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, folosim că x_1 rad, o înlocuim în ec, apoi înmulțim cu x_1 relația și obținem pe x_1^4, analog în loc pe x_2 și înmulțim cu x_2, analog cu x_3. Adunăm relațiile și folosim sumele anterioare

E_6) $S_{-1} = \frac{x_1 x_2}{x_1} + \frac{x_1 x_3}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{S_2}{S_3}$

Ex1: $2X^3 - 3X^2 + X - 1 = 0$ și $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, se cere:

a) $S_{-1} = ?$ b) $S_1 = ?$ c) $S_2 = ?$

d) $S_3 = ?$ e) $S_4 = ?$

E_1) $2X^3 - 3X^2 + X - 1 = 0$, din VIETE

$\Rightarrow S_1 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

$S_3 = -\frac{d}{a} = \frac{1}{2}$

E_2) $S_{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3}$

$= \frac{S_2}{S_3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

E_3) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

E_4) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 =$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

E_5) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

x_1 rad $\Rightarrow 2x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 - 1 = 0$

x_2 rad $\Rightarrow 2x_2^3 - 3x_2^2 + x_2 - 1 = 0$

x_3 rad $\Rightarrow 2x_3^3 - 3x_3^2 + x_3 - 1 = 0$

$+$ ": $2S_3 - 3S_2 + S_1 - 3 = 0 \Rightarrow$

$2S_3 - 3 \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - 3 = 0 / \cdot 4$

$\Rightarrow 8S_3 - 15 + 6 - 12 = 0 \Rightarrow 8S_3 = 21$

$\Rightarrow S_3 = \frac{21}{8}$

E_4) $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

x_1 rad $\Rightarrow 2x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 - 1 = 0 / \cdot x_1 \Rightarrow$

$2x_1^4 - 3x_1^3 + x_1^2 - x_1 = 0$, analog

$2x_2^4 - 3x_2^3 + x_2^2 - x_2 = 0$ și

$2x_3^4 - 3x_3^3 + x_3^2 - x_3 = 0$

$+$ ": $2S_4 - 3S_3 + S_2 - S_1 = 0$

$\Rightarrow 2S_4 - 3 \cdot \frac{21}{8} + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = 0 / \cdot 8$

$16S_4 - 63 + 10 - 12 = 0$

$\Rightarrow 16S_4 = -65 \Rightarrow S_4 = -\frac{65}{16}$

CUM STUDIEM DACĂ UN POLINOM ARE TOATE RĂDĂCINILE REALE (sau că NU ARE NICIO RĂDĂCINĂ REALĂ)

E_1) se scriu relațiile lui VIETE

E_2) se calculează $S_{1,p}$ unde $S_{1,p} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = S_1^2 - 2S_2$

E_3) se discută în funcție de semn

- Dacă $S_{1,p} < 0 \Rightarrow f$ nu are toate rād. reale
- Dacă $S_{1,p} = 0$ și dacă toate rād. lui f ar fi reale ar rezulta că toate sunt zero și verificăm VIETE (probabil obținem contradicție)
- Dacă $S_{1,p} > 0 \Rightarrow$ NU ȘTIM $\Rightarrow E_4$)

E_4) se calculează $S_{2,p}$ unde $S_{2,p} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}$, se scrie în funcție de sumele de la VIETE, se face discuția de la E_3) pt $S_{2,p}$; dacă NU ȘTIM ce e cu rād $\Rightarrow E_5$)

E_5) se calculează $S_{3,p}$ unde $S_{3,p} = (x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + \dots + (x_{n-1}-x_n)^2$, se scrie în funcție de VIETE, se discută ca la E_3)

Obs.: Pt a arăta că f nu are nicio rād. reală, arătăm sau că f are ac. semn, sau pp. are o rād reală și contradicție

---

Exp. 1 arăt. că $f = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 1$ nu are toate rād. reale

E_1) din VIETE $\Rightarrow S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 0, S_4 = -1$

E_2) $S_1^2 - 2S_2 = 4 - 2 \cdot 5 = -6 < 0 \Rightarrow f$ nu are toate rād. reale

Exp 2: arăt. că $f = X^4 + 5X^3 + 4X^2 + 2X + 1$ nu are toate rād. reale

---

E_1) din VIETE $\Rightarrow S_1 = -5, S_2 = 4, S_3 = -2, S_4 = 1$

E_2) $S_1^2 - 2S_2 = (-5)^2 - 2 \cdot 4 = 17 > 0 \Rightarrow$ nu știm cum sunt rădăc. $x_2 x_3 x_4$

E_3) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2} + \dots + \frac{1}{x_3x_4}\right) =$

$= \left(\frac{S_3}{S_4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{S_2}{S_4} = \left(\frac{-2}{1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{1} = -6 < 0$

$\Rightarrow f$ nu are toate rād. reale

Exp 3: arăt. că $f = X^4 + X^2 + 1$ nu are nicio rād. reală

E_1) dacă α rād $\Rightarrow f(\alpha) = 0$ (*)

$\Rightarrow \alpha^4 + \alpha^2 + 1 = 0$

Dar, $\alpha^4 \geq 0, \alpha^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^4 + \alpha^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow f(\alpha) \neq 0$, contrad cu (*) $\Rightarrow f$ nu are nicio rād reală

Exp 4: $X^3 + 3X^2 + 4X + 1 = 0$, arăt. că f nu are toate rād reale

---

E_1) $S_1^2 - 2S_2 = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$ NU ȘTIM

E_2) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2} + \dots\right)$

$= \left(\frac{S_2}{S_3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{S_1}{S_3} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{1} > 0 \Rightarrow$ NU ȘTIM

E_3) $(x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_3)^2 = \dots = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + \dots) =$

$= 2(S_1^2 - 2S_2) - 2S_2 = 2(9-8) - 2 \cdot 4 = -6 < 0$

$\Rightarrow f$ nu are toate rād reale

GĂSIREA RĂDĂCINILOR ÎNTREGI SAU RAȚIONALE

(E_1) Posibilele rădăcini întregi sunt printre divizorii termenului liber. Dacă niciunul nu verifică ecuația $\Rightarrow f$ nu are rădăcini întregi

(E_2) Posibilele rădăcini raționale sunt printre $\frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coef dominant}}}$. Dacă niciuna nu verifică ecuația $\Rightarrow f$ nu are răd. raționale

Exp1: $f = X^3 - X + 1$. Studiați dacă f are răd întregi

$D_1 = \{\pm 1\}$, $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow 1$ nu e rădăcină

$f(-1) = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow -1$ nu e rădăcină

$\Rightarrow f$ nu are răd întregi

Exp2: $f = 4X^3 - X + 9$, studiați dacă f are răd raționale

$$\frac{D_9}{D_4} = \frac{\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}}{\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{4}\}$$

ECUAȚII RECIPROCE

(N2)

1) o ecuație este <u>reciprocă</u> dacă toți coeficienții egal depărtați de extremi sunt egali

Ex: $2x^3+5x^2+5x+2=0$ e reciprocă

$2x^3+7x^2+5x+2=0$ nu e reciproc.

2) <u>TIP I</u>: ec. reciproc de gr <u>III</u>

Horner pt -1 și avem

$(x+1)\,/\,(\text{ec gr II})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{sau} \\ x_{1,2}=\dots \end{cases}$

3) <u>TIP II</u>: ec reciproc de gr <u>IV</u> – se împarte cu x^2 și se grupează sub forma $a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c=0$

not $x+\frac{1}{x}=t\,/\,()^2 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, se rezolvă ec în $t \Rightarrow t_{1,2}$, apoi revenim la x

4) <u>TIP III</u> ec reciproc de gr <u>V</u>: se face Horner pt $x=-1 \Rightarrow$

$(x+1)\,/\,(\text{ec. reciproc gr IV})=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{sau} \\ \text{ec. de gr IV}=0 \end{cases}$

<u>Ex 1</u>: $2x^3+7x^2+7x+2=0$

E_1) ec. reciprocă de gr III $\Rightarrow$ Horner

	x^3	x^2	x	x^0
	2	7	7	2
-1	2	5	2	0

E_2) $(x+1)\,/\,(2x^2+5x+2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \text{sau} \\ 2x^2+5x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm 3}{4} \begin{matrix} \nearrow -\frac{1}{2} \\ \searrow -2 \end{matrix}$

$S_f: x\in\{-2,-1,-\frac{1}{2}\}$

<u>Ex 2</u>: $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$

E_1) $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0\,/:x^2$

$2x^2-9x+14-9\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}=0$

E_2) $2(x^2+\frac{1}{x^2})-9(x+\frac{1}{x})+14=0$

not $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

E_3) $2(t^2-2)-9t+14=0$

$\Rightarrow 2t^2-9t+10=0$

$t_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{4} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{5}{2} \end{matrix}$

E_4) $t_1=2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\,/\cdot x \Rightarrow x^2-2x+1=0$

$\Rightarrow x_1=x_2=1$

E_5) $t_2=\frac{5}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\,/\cdot 2x \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Rightarrow x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$

$S_f: x\in\{\frac{1}{2},1,2\}$

<u>Ex 3</u>: $2x^5-7x^4+5x^3+5x^2-7x+2=0$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	2	-7	5	5	-7	2
-1	2	-9	14	-9	2	0

$\Rightarrow (x+1)(2x^4-9x^3+14x^2-9x+2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \text{sau} \\ 2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0 \text{ care e ec. de mai sus} \end{cases}$