Data:

CLASA A XII-A

SETUL 1
ALGEBRĂ XII, partea 1

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar 2017-2018

MULȚIMEA CLASELOR DE RESTURI

LEGI DE COMPOZIȚIE, PROPRIETĂȚI

FORMA RESTRÂNSĂ A UNEI LEGI DE COMPOZIȚIE

MONOID

GRUP

MORFISME ŞI IZOMORFISME DE MONOIZI, GRUPURI

INELE

CORPURI

MORFISME ŞI IZOMORFISME DE ~~NELE~~ INELE, CORPURI

Nivel 0:	**pag**
Nivel *:	**pag**
Nivel **:	**pag**
Nivel *:**	**pag**

TOTAL: pag

MULȚIMEA $\mathbb{Z}_n$, OPERAȚII, TABLA, ECUAȚII, SISTEME

(N1)

1) $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ unde

$\hat{0} = \{$toate nr care împărț. la n dau rest 0$\}$

$\hat{1} = \{$toate nr. care împărț la n dau rest 1$\}$ etc

Exp.: $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ unde

$\hat{0} = \{\dots; -6; -3; 0; 3; 6; \dots\}$

$\hat{1} = \{\dots; -2; 1; 4; 7 \dots\}$

$\hat{2} = \{\dots; -1; 2; 5; 8; \dots\}$

Obs 1: în orice clasă $\hat{k}$, numerele merg din n în n

Obs 2: în $\mathbb{Z}_n$, elementele $\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}$ se numesc <u>reprezentanți canonici</u>

---

2) <u>Operații în $\mathbb{Z}_n$</u>: adunarea, scăderea, înmulțirea se efect. ca și cu numere naturale, doar că dacă rezultatul nu e în $\mathbb{Z}_n$, pentru a-l aduce în $\mathbb{Z}_n$ sunt 2 metode:

met I: calc. restul împărțirii la n

met II: adunăm sau scădem multiplii de n

Exp.: $\mathbb{Z}_5$: $\hat{4}+\hat{3} = \hat{7} = \hat{2}$ (scad 5)

$\mathbb{Z}_8$: $\hat{7}\cdot\hat{6} = \hat{42} = \hat{2}$ (restul 42:8)

$\mathbb{Z}_7$: $\hat{2}-\hat{5} = -\hat{3} = \hat{4}$ (adun 7)

Obs: la nr. negative se adună multiplii din:

Exp.: în $\mathbb{Z}_6$: $-\hat{4}\hat{1} = -\hat{4}+\hat{4}\hat{2} = \hat{1}$

în $\mathbb{Z}_5$: $-\hat{1}\hat{1} = -\hat{1}\hat{1}+\hat{1}\hat{5} = \hat{4}$

3) <u>tabla</u>: $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

4) <u>rezolv. de ec în $\mathbb{Z}_n$</u> se aduc la forma $ax = b$, se face linia din tabla pt a și se aleg valorile lui x convenabile

Exp.: în $\mathbb{Z}_6$, $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$

E_1) $\hat{2}x = \hat{4}$, e greșit să scriu $x = \hat{2}$

E_2)

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$

$\Rightarrow x \in \{\hat{2}; \hat{5}\}$

Obs: Dacă apar ec de grad mai mare sau cu mai multe nec., dăm valori lui x

5) <u>rezolv de sisteme</u>: se folosește metoda reducerii, avem valori posibile care se verifică în ambele ecuații

Exp.: $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{3} \\ x + \hat{3}y = \hat{4} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_6$

$\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{3} \\ x + \hat{3}y = \hat{4} \mid \cdot \hat{2} \end{cases}$ și scad ec $\Rightarrow$

$y = \hat{3} - \hat{8} \Rightarrow y = -\hat{5} \Rightarrow \boxed{y = \hat{1}}$

înloc $\Rightarrow x + \hat{3}y = \hat{4} \Rightarrow \boxed{x = \hat{1}}$

o verif în sistem $\begin{cases} \hat{2}+\hat{1} = \hat{3} \\ 1+\hat{3} = \hat{4} \end{cases}$ adev $\Rightarrow \begin{cases} x = \hat{1} \\ y = \hat{1} \end{cases}$ soluție

PROPRIETĂȚI ALE LEGILOR DE COMPOZIȚIE (N1)

LEGE INTERNĂ, COMUTATIVITATE, ASOCIATIVITATE, ELEMENT NEUTRU, ELEMENTE SIMETRIZABILE

1) $*$ lege internă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$

Obs.: $*$ lege internă pe $M \subset A \Leftrightarrow$ $(M, *)$ parte stabilă a lui A în raport cu $*$

2) $*$ comutativă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x$

3) $*$ asociativă pe M
$\forall x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

4) $*$ admite el neutru pe $M \Leftrightarrow$
$\exists e \in M$ a.î. $\forall x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x$

Obs 1: $\exists e \in M$ apare la început, apoi $\forall x \in M$ pt că e nu are voie să depindă de x

Obs 2: se aduce relația la forma $e(_) = \ldots$, $\forall x \in M \Rightarrow e =$

Obs 3: se pornește cu $x * e = x$, se găsește e, se precizează că $e \in M$ și dacă $*$ comut, se scrie că $x * e = e * x \Rightarrow e$ el neutru, altfel se găsește același e din $e * x = x$

5) toate elem. sunt simetrizabile $\Leftrightarrow$
$\forall x \in M, \exists x' \in M$ cu $x * x' = x' * x = e$

Obs 1: apare prima dată $\forall x \in M$, apoi $\exists x' \in M$ pt că x' poate depinde de x

Obs 2.: se pornește cu $x * x' = e$, se arată că $x' \in M$ și dacă $*$ comutat, se scrie că $x * x' = x' * x \Rightarrow x'$ este simetricul lui x, dacă nu e comut se găsește același x' din $x' * x = e$

Obs 3: un element x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in M$ cu $x * x' = x' * x = e$

Ex1: Fie $M = (3; \infty)$ și legea $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Studiați proprietățile legii pe M

E1) $*$ lege internă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$

$x \in M \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$
$y \in M \Rightarrow y > 3 \Rightarrow y - 3 > 0$

„$\cdot$" $(x-3)(y-3) > 0$
$\Rightarrow xy - 3x - 3y + 9 > 0 \mid +3 \Rightarrow$
$xy - 3x - 3y + 12 > 3 \Rightarrow x * y \in M \Rightarrow$
$*$ lege internă pe M

E2) $*$ comutativă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x$
$x * y = xy - 3x - 3y + 12$ } $\Rightarrow$ egalitate $\Rightarrow$ $*$ comutativă
$y * x = yx - 3y - 3x + 12$

E3) $*$ asociativă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$
$(x * y) * z = (xy - 3x - 3y + 12) * z =$
$= (xy - 3x - 3y + 12)z - 3(xy - 3x - 3y + 12) - 3z + 12 =$
$= xyz - 3xz - 3yz + 9z + 9x + 9y + 9z - 24$
Analog, dar se calculează, obținem pt $x * (y * z)$ același rezultat $\Rightarrow *$ asociativă pe M

E4) $*$ are el neutru pe $M \Leftrightarrow$
$\exists e \in M$ a.î. $\forall x \in M$: $x * e = e * x = x$
$x * e = x \Rightarrow xe - 3x - 3e + 12 = x$
$\Rightarrow e(x-3) = 4(x-3), \forall x \in M \Rightarrow e = 4 \in M$
din $*$ comut $\Rightarrow x * e = e * x \Rightarrow e = 4$ el neutru

E5) $*$ are toate elem. simetrizabile $\Leftrightarrow$
$\forall x \in M, \exists x' \in M$ cu $x * x' = x' * x = e$
$x * x' = e \Rightarrow xx' - 3x - 3x' + 12 = 4 \Rightarrow$
$x'(x-3) = 3x - 8$. Cum $x \in M \Rightarrow x > 3 \Rightarrow$
$x' = \frac{3x-8}{x-3}$, arătăm că $x' \in M \Leftrightarrow$
$\frac{3x-8}{x-3} > 3 \Leftrightarrow \frac{3x-8}{x-3} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} > 0$ adev
Cum $*$ comut $\Rightarrow x * x' = x' * x \Rightarrow x' = \frac{3x-8}{x-3}$ este simetricul lui x, $\forall x \in M$

PROPRIETĂȚI ALE MATRICILOR VALABILE ÎN CAZ GENERAL CARE SE POT TRANSMITE (N2)

1) <u>adunarea matricilor</u> este asociativă, comutativă, are el. neutru matricea nulă (formată doar din zerouri) și orice element e simetrizabil, simetricul lui A fiind $-A$ rezultă că și pe mulțimea noastră va fi asociativă, comutativă însă el neutru va fi matricea nulă <u>doar</u> dacă matricea nulă este în mț noastră, la fel simetricul va fi $-A$ doar dacă $-A$ este în mulțimea noastră, altfel trebuie calculate cu definiția

2) <u>înmulțirea matricilor</u> e asociat în cz general, NU e comut în cz general, are pe I_n el neutru (doar pt matrici pătratice) și simetricul lui A este $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$ rezultă că e asociat și pe mț noastră, poate fi comut pe mț noastră, are pe I_n el neutru doar dacă I_n este în mț noastră și are pe A^{-1} simetric doar dacă A^{-1} e în mț noastră, altfel folosim definiția pt a găsi el neutru și simetricul

Obs.: deși înmulțirea NU e comut în cz general, ea poate fi comut în cazul nostru, folosim definiția pt a studia

---

Ex.: Fie $M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
Studiați propr. înmulțirii pe M

E_1) deoarece înm matr e asociat în cz general $\Rightarrow$ e asociat pe M

E_2) deoarece „matr nu e comutat în cz general, studiem cu definiție:
$\forall X, Y \in M \Rightarrow X \cdot Y = Y \cdot X$
$X \cdot Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ gata
$Y \cdot X = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_3) deoarece „matr are pe I_2 el neutru pe $M_2(\mathbb{R})$ și $M \subset M_2(\mathbb{R})$, cum $I_2 \in M$ ($\forall x = 1$) $\Rightarrow$ înm are pe I_2 el neutru pe M

E_4) deoarece „ are pe A^{-1} simetric în ... trebuie să studiem dacă $A^{-1} \in M$, pt asta det $X = x$ și cond det $x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$ nu toate matricile admit inversa, necunoscută A^{-1}
Studiem cu definiția:
$\forall X \in M, \exists X' \in M$ cu $X \cdot X' = X' \cdot X = I_2$
$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $XX' = I_2$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} xx' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow xx' = 1$
$\forall x \neq 0 \rightarrow x' = \frac{1}{x}$, $\forall x = 0 \Rightarrow \nexists x'$
Așadar, $\forall x \neq 0 \Rightarrow$ matricea X are simetric $X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

FOLOSIREA ELEMENTULUI GENERIC PENTRU A DEMONSTRA PROPR. ALE OPERAȚIILOR CU MATRICI (N2)

E_1) se scrie matricea X care depinde de a sub forma $X(a)$

E_2) se deduce $X(a)+X(b)$ sau $X(a)\cdot X(b)$ (din lege internă)

E_3) se aplică definițiile și se lucrează cu relația descoperită la E_2)

Exemplu: Fie $M=\{X(a)=I_2+aA \mid a\neq -1\}$ unde $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, să se arate că "$\cdot$" este lege internă pe M și $(M,\cdot)$ parte stabilă (?)

E_1) $(M,\cdot)$ parte stabilă (?)

$\forall X(a), X(b)\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} X(a)X(b)\in M$

$X(a)X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=$

$=I_2+(a+b)A+abA^2$

Dar, $A^2=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=A$

$\Rightarrow X(a)X(b)=I_2+(a+b+ab)A$

$\Rightarrow X(a)X(b)=X(a+b+ab)$

E_2) Dar, $a\neq -1$, $b\neq -1$, ar trebui arătat că $a+b+ab\neq -1$

(R.A.) Pp. $a+b+ab=-1\Rightarrow$

$a+b+ab+1=0\Rightarrow a(1+b)+(b+1)=0$

$\Rightarrow (a+1)(b+1)=0\Rightarrow$ $a=-1$ K.O. sau $b=-1$ K.O.

$\Rightarrow a+b+ab\neq -1$

E_3) asociat: $\forall X(a), X(b), X(c)\in M$

$\overset{(?)}{\Rightarrow}(X(a)X(b))X(c)=X(a)(X(b)X(c))$

$(X(a)X(b))X(c)=X(a+b+ab)X(c)=$

$=X(a+b+ab+c+ac+bc+abc)$

$X(a)(X(b)X(c))=X(a)X(b+c+bc)=$

$=X(a+b+c+bc+ab+ac+abc)\Rightarrow$ egalit

$\Rightarrow$ "$\cdot$" asociat pe M

E_3) comut: $\forall X(a), X(b)\in M \overset{(?)}{\Rightarrow}$

$X(a)X(b)=X(b)X(a)$

$X(a)X(b)=X(a+b+ab)$, analog.

$X(b)X(a)=X(b+a+ba)\Rightarrow$ comut.

E_4) el neutru: $\exists X(e)\in M$ a.î. $\forall X(a)\in M$

$\Rightarrow X(a)X(e)=X(e)X(a)=X(a)$

$X(a)X(e)=X(a)\Rightarrow X(a+e+ae)=X(a)$

$\Rightarrow a+e+ae=a\Rightarrow e(a+1)=0$ și cum $a\neq -1\Rightarrow e=0\neq -1$, ok.

Cum "$\cdot$" comut pe $M\Rightarrow X(0)$ el neutru pe M

E_5) toate el. simetrizabile:

$\forall X(a)\in M, \exists X(a')\in M$ cu

$X(a)X(a')=X(a')X(a)=X(e)$

Dar $X(a)X(a')=X(e)\Rightarrow$

$X(a+a'+aa')=X(0)\Rightarrow a+a'+aa'=0$

$\Rightarrow a'(1+a)=-a$ și cum $a\neq -1$

$\Rightarrow a'=-\frac{a}{1+a}$. Rămâne să arăt că $a'\neq -1$, (R.A.) Pp $a'=-1$

$\Rightarrow -a=-1-a$ contr $\Rightarrow a'\neq -1$

Cum "$\cdot$" comut pe $M\Rightarrow$ simetricul lui elem $X(a)$ este $X(-\frac{a}{1+a})$

TABLA UNEI LEGI. PROPRIETĂȚI (N2)

DEDUSE DIN TABLĂ

1) tabla unei legi are forma

$*$	a_1	a_2	...	a_n
a_1				
a_2				
⋮				
a_n				

$\Rightarrow y$

* Obs 1: tabla există doar pt mț finite

2) $*$ internă $\Leftrightarrow$ în tablă nu apar el noi

3) $*$ asociativă NU SE POATE din tablă

4) $*$ comutativă $\Leftrightarrow$ elem. sunt simetrice față de diag pp

5) $*$ are el neutru $\Leftrightarrow$ există o linie și coloana corespunzăt. care lasă neschimbate el. mulțimii

6) un element e simetrizabil $\Leftrightarrow$ pe linia și pe coloana lui apare el neutru situat simetric față de diag principală

7) toate elem. sunt simetrizabile $\Leftrightarrow$ pe linia fiecărui element și pe coloana corespunz apare el neutru situat simetric față de diag pp.

Exp 1: Fie $x*y=\sqrt[3]{x\cdot y}$ și $M=\{-1;0;1\}$. Alcătuiți tabla legii și verificați proprietățile legii din tablă

E1)

$*$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

E_2) deoarece în tablă nu apar el noi $\Rightarrow$ $*$ lege internă pe M

E_3) deoarece toate elem sunt simetrice față de diag pp $\Rightarrow$ $*$ comutativă

E_4) deoarece linia și coloana corespunzătoare elem. 1 lasă neschimbate elem. mulțimii $\Rightarrow$ $\Rightarrow e=1$ el neutru

E_5) deoarece pe linia lui -1 există elem neutru $e=1$ situat chiar pe diag pp (deci simetric față de diag pp) $\Rightarrow -1$ este simetrizabil și simetricul său este tot -1

- deoarece pe linia lui 0 nu există el neutru $\Rightarrow$ 0 nu are simetric
- analog, pe linia și coloana lui 1 există el neutru $e=1$ simetric față de diag pp $\Rightarrow$ 1 este simetrizabil și simetricul său este tot 1

E_6) cum 0 nu e simetrizabil $\Rightarrow$ NU TOATE el. sunt simetrizabile

FORMA RESTRÂNSĂ A LUNEI (N1)

LEGI DE COMPOZIȚIE

- formă restrânsă înseamnă scrierea legii sub forma $x*y=\alpha(x-a)(y-a)+\beta$

Obs.: în cele mai multe cazuri, legea se poate scrie $x*y=\alpha(x-a)(y-a)+a$

Obs!: folosind forma restrânsă se poate deduce, în cazul $x*y=\alpha(x-a)(y-a)+a$ că $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n \text{ ori}}=\alpha^{n-1}(x-a)^n+a$, însă nu se memorează, se deduce apoi se arată prin inducție

---

Exp1: $x*y=xy-3x-3y+12$, rezolvați ecuația $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{2016 \text{ ori}}=4$

E_1) deducem forma restrânsă

$x*y=x(y-3)-3(y-3)+3$

$x*y=(x-3)(y-3)+3$

E_2) $x*x=(x-3)^2+3$, calculăm

$x*x*x=((x-3)^2+3)*x=$

$=((x-3)^2+3-3)(x-3)+3=$

$=(x-3)^3+3$

E_3) obs. că $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n \text{ ori}}=(x-3)^n+3, \forall n\geq 2$

arăt prin ind mat

E_4) I $P(2)$: $x*x=(x-3)^2+3$ adev.

II $\mathcal{P}_k$: $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev.

unde $P(k)$: $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{k \text{ ori}}=(x-3)^k+3$

$*x=(x-3)^{k+1}+3$

E_5) știm că $P(k)$ adev. $\Rightarrow$

$\underbrace{x*x*\ldots*x}_{k \text{ ori}}=(x-3)^k+3 \,|*x$

$\Rightarrow \underbrace{x*x*\ldots*x}_{(k+1) \text{ ori}}=((x-3)^k+3)*x=$

$=((x-3)^k+3-3)(x-3)+3=$

$=(x-3)^{k+1}+3 \Rightarrow P(k+1)$ adev.

$\Rightarrow P(n)$ adev, $\forall n\geq 2$

E_6) ec. devine:

$(x-3)^{2016}+3=4 \Rightarrow$

$(x-3)^{2016}=1 \Rightarrow$

$x-3=\pm 1$

E_7) $x-3=1 \Rightarrow x=4$

$x-3=-1 \Rightarrow x=2$

E_8) S_p: $x\in\{2;4\}$

MONOIZI

$(M,*)$ monoid $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (M,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă pe } M \\ * \text{ are element neutru pe } M \end{cases}$

$(M,*)$ monoid comutativ (abelian)

$\begin{cases} (M,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă pe } M \\ * \text{ comutativă pe } M \\ * \text{ are element neutru pe } M \end{cases}$

$(N,*)$ submonoid al $(M,*) \Leftrightarrow N \subset M$ și

$\begin{cases} \forall x,y \in N \Rightarrow x*y \in N \\ e \in N \end{cases}$

Obs.: Dacă $(M,*)$ monoid $\Rightarrow U(M,*)$ el. simetrizabile din M

Exp.: Dacă $(M,*)$ monoid cu $e=3$, găsiți elementele simetrizabile din $(M,*)$ unde $M=\mathbb{Z}\setminus\{2\}$, $x*y=xy-2x-2y+6$

$E_1) \forall x \in M, \exists x' \in M$ a.i. $x*x'=x'*x=e$

$E_2) x*x'=e \Rightarrow xx'-2x-2x'+6=3 \Rightarrow x'(x-2)=2x-3$

$E_3) x \neq 2 \Rightarrow x'=\frac{2x-3}{x-2}$, dar $x' \in M \Rightarrow x' \in \mathbb{Z}\setminus\{2\} \Rightarrow$

$\frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2(x-2)+1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2+\frac{1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in D_1$

$\Rightarrow x-2 \in \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{3;1\}$

$U(M,*)=\{3;1\}$

GRUP

(N1)

$(G,*)$ grup $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (G,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă} \\ * \text{ are el. neutru} \\ * \text{ are toate elem. simetrizabile} \end{cases}$

$(G,*)$ grup comutativ (abelian) $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} (G,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă} \\ * \text{ comutativă} \\ * \text{ are el. neutru} \\ * \text{ are toate elem. simetrizabile} \end{cases}$

Dacă $(G,*)$ grup și $(H,*)$ subgrup al $(G,*) \Leftrightarrow$

$H \subset G$ și $\begin{cases} \forall x,y \in H \Rightarrow x*y \in H \\ \forall x \in H \Rightarrow x' \in H \end{cases}$

Exp.: Se știe că $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grup abelian. Arătați că $(H,\cdot)$ subgrup unde $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

E_1) Arătăm că $H \subset \mathbb{C}$. Evident, $\forall z \in H \Rightarrow z \in \mathbb{C}$. Rămâne să arăt. că $\forall z \in H \Rightarrow z \neq 0$. Pt $z \in H \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z \neq 0$ (1)

E_2) Arătăm că: $\forall z_1, z_2 \in H \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in H$

$\left.\begin{array}{l} z_1 \in H \Rightarrow |z_1| = 1 \\ z_2 \in H \Rightarrow |z_2| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 1 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in H$ (2)

E_3) Arătăm că $\forall z \in H \Rightarrow \frac{1}{z} \in H$ (pt că inversul la înmulțirea numerelor raționale nenule este $\frac{1}{z}$)

Din $z \in H \Rightarrow |z| = 1, z \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} = \frac{1}{|z|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in H$ (3)

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$

PROPRIETĂȚI ÎN MONOIZI ȘI GRUPURI

1) $(\mathbb{Z}_n, +)$ grup abelian cu $e = \hat{0}$ și toate elem. sunt simetrizabile pt. că $\hat{k}' = -\hat{k} = \widehat{n-k}$

2) $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoid comutativ cu $e = \hat{1}$ și NU toate elem. sunt simetrizabile. Vor fi simetrizabile doar cele prime cu n (nu au divizori comuni cu n decât pe 1). Mulțimea elem. simetrizabile se notează cu $U(\mathbb{Z}_n)$

3) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ grup comutativ $\Leftrightarrow n$ este număr prim

4) ordinul unui element: cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$ a. î.
$\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = e$

Obs1: dacă $\nexists n \Rightarrow \text{ord } x = \infty$

Obs2: dacă G grup finit cu n elem $\Rightarrow \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = e$, dar ordinul poate fi mai mic decât n

5) ordinul unui grup - este nr. de elemente din grupul respectiv

Obs.: dacă G are o infinit de elemente $\Rightarrow \text{ord } G = \infty$

6) ordinul oricărui subgrup divide ordinul grupului

Ex1: în $(\mathbb{Z}_5, +)$, $\hat{3}' = -\hat{3} = \hat{5} - \hat{3} = \hat{2}$

Ex2: în $\mathbb{Z}_{12} \Rightarrow U(\mathbb{Z}_{12}, \cdot) = \{\hat{1}; \hat{5}; \hat{7}; \hat{11}\}$

Ex3: $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ grup pt că 7 nr prim

$(\mathbb{Z}_6^*, \cdot)$ NU e grup pt că 6 nu e prim

Ex4: în $(\mathbb{Z}_6, +)$, se cere $\text{ord } \hat{2} = ?$

E1) $e = \hat{0}$, $\hat{2} \neq \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 1$
$\hat{2} + \hat{2} = \hat{4} \neq \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 2$
$\hat{2} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{6} = \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} = 3$

Ex5 în $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$, $\text{ord } \hat{2} = ?$
$e = \hat{1}$, $\hat{2} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 1$
$\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 2$
$\hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{8} = \hat{2} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 3$
$\hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{16} = \hat{4} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 4$
obs. că $\hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot \hat{2} \in \{\hat{2}; \hat{4}\} \Rightarrow$ niciodată nu e $\hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} = \infty$

Ex6: în $(\mathbb{Z}_6, +)$, evident $\hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{12} = \hat{0}$ și totuși $\text{ord } \hat{2} = 3$

Ex7: $\text{ord}(\mathbb{Z}_6, +) = 6$
$\text{ord}(\mathbb{Z}, +) = \infty$

REGULI DE CALCUL

(N3)

ÎNTR-UN GRUP

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu "$\cdot$" o lege oarecare, atunci:

1) $xy = xz \mid \cdot_s x^{-1} \Rightarrow y = z$

2) $xy = zy \mid \cdot_d y^{-1} \Rightarrow x = z$

3) $x^n x^m = x^{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

4) $(x^n)^m = x^{nm}$

· Exp.: Arătați că dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu proprietatea că $\forall x, y \in G$ avem $(xy)^2 = x^2 y^2$, atunci $(G,\cdot)$ e comutativ

---

E_1) $(xy)^2 = x^2 y^2 \Leftrightarrow$

$xyxy = xxyy \mid \cdot_s x^{-1}$

$\Rightarrow yxy = xyy \mid \cdot_d y^{-1}$

$\Rightarrow xy = xy$, $\forall x, y \in G$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ comutativ

MORFISME, IZOMORFISME DE MONOIZI

Dacă $(M,*)$ și $(N,\circ)$ doi monoizi $\Rightarrow f: M \to N$ este morfism de monoizi $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x*y) = f(x) \circ f(y) \\ f(e_*) = e_\circ \end{cases}$

Dacă $(M,*)$ și $(N,\circ)$ doi monoizi și $f: M \to N$ este izomorfism de monoizi $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijectivă} \\ f(x*y) = f(x) \circ f(y) \\ f(e_*) = e_\circ \end{cases}$

Obs: f automorfism de monoizi $\Leftrightarrow f$ izomorfism de monoizi a.î. $M = N$ (adică $D_f = Cd_f$)

Exp.: Fie $G = (-1,1)$, $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Arătați că $f: \mathbb{R}_+^* \to G$ este izomorf între monoizii $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G,*)$

E_1) $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$

E_2) $f(x \cdot y) = \frac{xy-1}{xy+1}$ (1)

E_3) $f(x) * f(y) = \frac{x-1}{x+1} * \frac{y-1}{y+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{y-1}{y+1}} = \frac{\frac{xy+x-y-1+xy+y-x-1}{(x+1)(y+1)}}{\frac{xy+x+y+1+xy-x-y+1}{(x+1)(y+1)}}$

$= \frac{2(xy-1)}{2(xy+1)}$ (2).

E_4) arăt. că $f(e_\cdot) = e_*$, adică $e_* = 0$ și ar trebui ca

$f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-b}{1+1} = 0$ adev. (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ f morfism de monoizi

E_5) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f_1 \nearrow \Rightarrow f$ inj. $\Rightarrow f$ biject (4)

E_6) $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f_3 \nearrow \Rightarrow f$ surj

... de monoizi

MORFISME, IZOMORFISME DE GRUPURI

Dacă $(G,*)$ și $(H,\circ)$ 2 grupuri $\Rightarrow f: G \to H$ este morfism de grupuri $\Leftrightarrow f(x*y) = f(x) \circ f(y)$

Dacă $(G,*)$ și $(H,\circ)$ 2 grupuri $\Rightarrow f: G \to H$ este izomorfism de grupuri $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x*y) = f(x) \circ f(y) \\ f \text{ bijectă} \end{cases}$

Obs: f automorfism de grupuri $\Leftrightarrow f$ izomorf de grupuri și $G = H$

Exp: ca cel de la monoizi, doar că nu mai trebuie verificată condiția $f(e_*) = e_\circ$

DETERMINAREA UNUI MORFISM (SAU IZOMORFISM) DE GRUPURI (N3)

Fie $(G_1, *)$ și $(G_2, \circ)$ 2 GRUPURI, determinați $f: G_1 \to G_2$ izomorfism

E_1) Condiția necesară (dar nu suficientă) este ca $f(e_*) = e_\circ$, intuim forma lui f

E_2) verificăm că f intuit anterior e morfism (sau izomorfism), depinde ce ni se cere

---

Ex.: Fie $M = \{A_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Arătați că $(\mathbb{R}, +)$ și $(M, \cdot)$ izomorfe, unde $(\mathbb{R}, +), (M, \cdot)$ sunt grupuri

---

E_1) f morfism $\Rightarrow$ condiție necesară $f(e_+) = e_\cdot$

E_2) $e_+ = 0$, $e_\cdot = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0 \Rightarrow f(0) = A_0$

E_3) intuim că $f(x) = A_x$

E_4) verificăm dacă $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ și dacă f biject

E_5) $f(x+y) = A_{x+y}$

$$\left.\begin{array}{l} A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y} \\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

E_6) f bijectivă (?)

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow A_{x_1} = A_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ injectivă

$\forall A_x \in M \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = A_x$ din definiție $\Rightarrow$ f surjectivă

E_7) $\Rightarrow$ funcția $f(x) = A_x$ intuită de noi e izomorfism.

GRUPURI NEIZOMORFE (N3)

Fie $(G_1, *)$ și $(G_2, \circ)$ 2 grupuri. Arătați că $\nexists$ $f: G_1 \to G_2$ cu f ~~~~ morfism (sau izomorfism)

E_1) (R.A.) Pp. $\exists f: G_1 \to G_2$, f morfism $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(e_*) = e_\circ$ (proprietate)

E_2) Folosim definiția morfismului și obținem contradicții

Exp: Arătați că $\nexists$ morfism $f: (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ cu $f(\bar{2}) = \hat{3}$

$\mathbb{Z}_7^*$ s-a notat $\bar{2}$ clasa lui 2 din $\mathbb{Z}_6$, nu s-a scris $\hat{2}$ pt a nu se confunda $\hat{2}$ din $\mathbb{Z}_6$ cu $\hat{2}$ din $\mathbb{Z}_7$ $\neq$

E_1) (R.A.) Pp. $\exists f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_7^*$, f morfism

$\Rightarrow f(e_+) = e_\circ \Rightarrow f(\bar{0}) = \hat{1}$

E_2) Trebuie folosit $f(\bar{2}) = \hat{3}$, așadar din $f(\bar{0}) = \hat{1}$

$\Rightarrow f(\bar{2} + \bar{2} + \bar{2}) = \hat{1} \xrightarrow{f \text{ morfism}}$

$f(\bar{2}) \cdot f(\bar{2}) \cdot f(\bar{2}) = \hat{1} \xrightarrow{\text{în}}$

$\hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \underset{\mathbb{Z}_7}{=} \hat{1} \hookrightarrow \hat{27} \underset{\mathbb{Z}_7}{=} \hat{1} \hookrightarrow \hat{6} = \hat{1}$ ↯

(contradicții) $\Rightarrow \nexists$ morfism

---

mod II (ANCA): $f(\bar{2}) = \hat{3} \Rightarrow f(\bar{1} + \bar{1}) = f(\bar{1}) \cdot f(\bar{1}) = \hat{3}$ cazuri, $\forall k \in \mathbb{Z}_7^*$ $\hat{2} \cdot \hat{k} \neq \hat{3}$ ↯

DISTRIBUTIVITATEA O FAȚĂ (N2) DE *

- o distributivă la stânga față de $* \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M$ avem
  $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$
- o distributivă la dreapta față de $* \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M$ avem
  $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$
- o distributivă față de $* \Leftrightarrow$ o distrib la stg și la dreapta

Ex: Stabiliți dacă o distrib față de * unde
$x * y = x + y + 1$ și $x \circ y = x + y + xy$

E_1) Studiem dacă o distrib. la stg față de $* \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M$ avem:

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

E_2) $x \circ (y * z) = x \circ (y + z + 1) = x + (y + z + 1) + x(y + z + 1) =$

$= x + y + z + 1 + xy + xz + x$ (1)

E_3) $(x \circ y) * (x \circ z) = (x + y + xy) * (x + z + xz) =$

$= (x + y + xy) + (x + z + xz) + 1$

$= 2x + y + z + xy + xz + 1$ (2)

Din (1) + (2) $\Rightarrow$ o nu e distrib la stg față de *

INELE

$(A, *, \circ)$ inel $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (A, *) \text{ grup abelian} \\ (A, \circ) \text{ monoid} \\ \circ \text{ distributivă față de } * \end{cases}$

Obs.: întotdeauna a 2-a lege e distributivă față de prima lege

---

Dacă $(A, *, \circ)$ inel $\Rightarrow (M, *, \circ)$ subinel $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} (M, *) \text{ subgrup al } (A, *) \\ (M, \circ) \text{ submonoid al } (A, \circ) \end{cases}$

adică $\begin{cases} \forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M \\ \forall x \in M \Rightarrow x'_* \in M \end{cases}$ de la subgrup

și $\begin{cases} \forall x, y \in M \Rightarrow x \circ y \in M \\ e_\circ \in M \end{cases}$ de la submonoid

---

Obs.: Dacă $(A, *, \circ)$ inel $\Rightarrow$ în raport cu $*$, toate elementele sunt simetrizabile (deoarece $(A, *)$ grup) iar în raport cu $\circ$ nu sunt toate simetrizabile

Elementele simetrizabile în raport cu $\circ$ se numesc elementele simetrizabile ale inelului și se notează

$U((A, *, \circ))$

INEL FĂRĂ DIVIZORI AI LUI ZERO

Dacă $(A, *, o)$ inel, spunem că el nu are divizori ai lui zero dacă din $x \circ y = e_*$ avem $x = e_*$ sau $y = e_*$

Dacă $(A, *, o)$ inel, spunem că el are divizori ai lui zero dacă $\exists\, x \neq e_*$, $y \neq e_*$ a.î. $x * y = e_*$

Exp: $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ inel, Studiați dacă are sau nu are divizori ai lui zero

$e_* = e_+$ adică $\hat{0}$

Deoarece $\exists\, \hat{2} \neq \hat{0}$, $\hat{3} \neq \hat{0}$ a.î. $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow$ inelul are divizori ai lui zero

---

Exp 2: Fie inelul $(\mathbb{Z}, *, o)$ a.î. $x * y = x + y + 2$, și $e_* = -2$

$x \circ y = xy + 2(x+y) + 2$. Studiați dacă inelul are sau nu are divizori ai lui zero

---

E1) $x \circ y = e_* \Leftrightarrow xy + 2(x+y) + 2 = -2 \Leftrightarrow xy + 2x + 2y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x(y+2) + 2(y+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 0$

E2) $\Rightarrow$ $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x = e_*$ sau $y+2 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow y = e_*$. $\Rightarrow (\mathbb{Z}, *, o)$ nu are divizori ai lui zero

Obs: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este fără divizori ai lui zero $\Leftrightarrow n$ nr. prim

Obs 2: În $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, elementele care nu sunt divizori

CORP

$(K, *, \circ)$ corp $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (K, *) \text{ grup abelian} \\ (K \setminus \{e_*\}, \circ) \text{ grup} \\ \circ \text{ distrib față de } * \end{cases}$

Obs.1: Dacă $\circ$ comutativă $\Rightarrow (K, *, \circ)$ corp abelian (comutativ)

Obs.2: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ corp $\Leftrightarrow n$ nr. prim

---

Dacă $(K, *, \circ)$ corp $\Rightarrow (M, *, \circ)$ subcorp

$\Leftrightarrow (M, *)$ subgrup al $(K, *)$

$(M, \circ)$ subgrup al $(K, \circ)$ (aici fără e_*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M \\ \forall x \in M \Rightarrow x'_* \in M \\ \forall x, y \in M \setminus \{e_*\} \Rightarrow x \circ y \in M \setminus \{e_*\} \\ \forall x \in M \setminus \{e_*\} \Rightarrow x'_\circ \in M \setminus \{e_*\} \end{cases}$

MORFISME, IZOMORFISME DE INELE ȘI CORPURI (N2)

1) $(A, *, \circ)$, $(B, \perp, \top)$ 2 inele $\Rightarrow$ f morf de inele

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ morf de grupuri între } (A,*) \text{ și } (B,\perp) \\ f \text{ morf de monoizi între } (A,\circ) \text{ și } (B,\top) \end{cases}$

$\mapsto$ $\begin{cases} f(x*y) = f(x) \perp f(y) \\ f(x \circ y) = f(x) \top f(y) \\ f(e_\circ) = e_\top \end{cases}$

2) f izom. de inele $\Leftrightarrow$ f morf de inele și f bijectivă

3) f automorf de inele $\Leftrightarrow$ f izomorf de inele și $A = B$

4) $(M, *, \circ)$, $(N, \perp, \top)$ 2 corpuri $\Rightarrow$ f morf de corpuri

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ morf de grupuri între } (M,*) \text{ și } (N,\perp) \\ f \text{ morf de grupuri între } (M\setminus\{e_*\},\circ) \text{ și } (N\setminus\{e_\perp\},\top) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x*y) = f(x) \perp f(y), \ \forall x, y \in M \\ f(x \circ y) = f(x) \top f(y), \ \forall x, y \in M\setminus\{e_*\} \end{cases}$

5) f izomorf de corpuri $\Rightarrow$ f morf de corpuri și f bijectivă

6) f automorf. de corpuri $\Leftrightarrow$ f izomorf de corpuri și $M = N$