TEOREMA LUI LAGRANGE

1) $a,b=?$ dacă $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ verifică ipoteza T lui Lagrange și găsiți punctul c corespunzător, $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0] \\ ax+b, & x\in(0,1] \end{cases}$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, arătați că $\forall k\in(0,\infty)$ avem $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

3) rezolvați $3^x+4^x=2^x+5^x$

4) arăt. că a_n convergent unde $a_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n$, $\forall n\geq 1$

5) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, arătați că $\forall k>0$ avem $\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}$

6) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, x cu $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2k\sqrt{k}}$$

7) $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$ și $g(x)=f'(x)$, x cu $\exists c_n\in(n,n+1)$ cu $g(c_n)=f(n+1)-f(n)$

8) rezolvați: $3^x+5^x=2^x+6^x$

Prof. Ovidiu Bădescu

$f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}$

Să se arate: $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < f(k+1)-f(k) < \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

E1) Observăm că în interior apare $f(k+1)-f(k)$ $\Rightarrow$ ne gândim la T. LAGRANGE

E2) $f:[k,k+1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

este cont pe $[k,k+1]$, derivabilă pe $(k,k+1)$

$\Rightarrow \exists c\in(k,k+1)$ a.î. $f(k+1)-f(k)=f'(c)(k+1-k)$

$\Rightarrow f(k+1)-f(k)=f'(c)\cdot 1$

E3) $f'(x)=\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)'=\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=$

$=\frac{3}{2}\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=x^{-\frac{1}{3}}=$

$=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Ir. Δ - arg. putut $\left(\sqrt[3]{u}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\cdot 2x$

$=\frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ✱

E4) $f'(c)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$, $c\in(k,k+1)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{c}}<\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

1 ... 110 - $\frac{1}{\ldots}$

Arătați că a_n convergent dacă

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \ \forall n \geq 1$$

E_1) monotonia: $a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) =$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq \frac{1}{n+1} - \left(\ln(n+1) - \ln n\right)$

E_2) $f: [n, n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, f cont pe $[n, n+1]$, f deriv. pe $(n, n+1)$ $\xrightarrow{\text{T. Lagrange}}$ $\exists c \in (n, n+1)$ cu $f(n+1) - f(n) = f'(c)(n+1-n)$

$\Rightarrow f(n+1) - f(n) = f'(c)$

E_3) $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c}$ $\Bigg\} \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$

E_4) în E_1), $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \left(\ln(n+1) - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c}$

cu $c \in (n, n+1) \Rightarrow n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{c} < 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \boxed{a_n \searrow}$ (1)

E_5) $a_n \searrow \Rightarrow a_n \leq a_1 \Rightarrow a_n \leq 1 - \ln 1 \Rightarrow \boxed{a_n \leq 1}$

E_6) rămâne să arăt că $a_n \geq m$, m marg inferioară

din T. LAGRANGE ~~pe~~ $f: [n, n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x \Rightarrow$

$f(n+1) - f(n) = f'(c)((n+1) - n) \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$, $c \in (n, n+1)$

$\Rightarrow n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

E_7) aleg $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$ și dau valori

$n = 1 \Rightarrow \ln 2 - \ln 1 < 1$

$n = 2 \Rightarrow \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

$\dots$

$n = n \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

$+$ | $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Big| - \ln$

$\Rightarrow a_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$

$\Rightarrow \boxed{a_n > 0}$

$\Rightarrow a_n \in [0; 1]$

mărg (2)

E_8) din (1)+(2) $\Rightarrow a_n$ convergent

$+$ | $\ln(n+1) - \ln n < a_n$

416/94 Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$

Arătați că $\forall k>0$ avem:

$$\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}$$

E_1) Dacă aplic $f(k+1)-f(k)$, mă gândesc la T. Lagrange

E_2) $f:[k,k+1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ este continuă pe $[k,k+1]$, derivabilă pe $(k,k+1)\Rightarrow\exists c\in(k,k+1)$ a.î. $f(k+1)-f(k)=f'(c)(k+1-k)$

E_3) Dar, $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{c}$

E_4) $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{c}$

E_5) Dar, $c\in(k,k+1)\Rightarrow k<c<k+1$

$$\Rightarrow\frac{1}{k+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{k}$$

E_6) Folosind E_4) $\Rightarrow\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Arătați că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$

E_1) Observăm că concluzia este echivalentă cu

$$\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < f(k)-f(k+1) < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$$

E_2) Când apare $f(b)-f(a)$, ne gândim la LAGRANGE

E_3) $f:[k;k+1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

f cont pe $[k,k+1]$

f derivabilă pe $(k,k+1)$

$\Rightarrow \exists\, c\in(k,k+1)$ a.î. $f(k+1)-f(k)=f'(c)(k+1-k)$

$$\Rightarrow f(k+1)-f(k)=f'(c) \quad (1)$$

E_4) $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1'\cdot\sqrt{x}-1\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

E_5) Relația (1) $\Leftrightarrow f(k+1)-f(k)=-\frac{1}{2c\sqrt{c}} \mid\cdot(-1)$

$$f(k)-f(k+1)=\frac{1}{2c\sqrt{c}},\ c\in(k,k+1) \quad (2)$$

E_6) Dar $c\in(k,k+1)\Rightarrow 2k\sqrt{k}<2c\sqrt{c}<2(k+1)\sqrt{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2c\sqrt{c}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}} \xrightarrow{(2)}$$

$$f(k)-f(k+1) < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$, $g(x) = f'(x)$

Arătați că $\exists\, c_n \in (n, n+1)$ a.î.

$g(c_n) = f(n+1) - f(n)$

E_1) Când întâlnim $f(b) - f(a)$ ne gândim la T. Lagrange:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f cont pe $[a,b]$

f derivabilă pe (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

E_2) $f : [n, n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$

f cont pe $[n, n+1]$ $\Rightarrow \exists\, c_n \in (n, n+1)$

f derivabilă pe $(n, n+1)$

a.î. $f(n+1) - f(n) = f'(c_n)(n+1-n)$

$f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$

E_3) Dar, $f'(x) = g(x)$ din ipoteză

$\Rightarrow f(n+1) - f(n) = g(c_n)$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați ecuația:

$$3^x + 5^x = 2^x + 6^x$$

$E_1)$ $3^x - 2^x = 6^x - 5^x$

$E_2)$ $\exists$ T. lui LAGRANGE:

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f cont pe $[a,b]$, f derivabilă pe (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$E_3)$ Fie $f:[2;3] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^x$ cont pe $[2;3]$,

derivabilă pe $(2;3) \Rightarrow \exists\, c_1 \in (2;3)$ a.î.

$$f(3) - f(2) = f'(c_1)(3-2)$$

$$3^x - 2^x = f'(c_1),\ c_1 \in (2;3)$$

$E_4)$ Fie $f:[5;6] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^x$ cont pe $[5;6]$,

derivabilă pe $(5;6) \Rightarrow \exists\, c_2 \in (5;6)$ a.î.

$$f(6) - f(5) = f'(c_2)(6-5)$$

$$\Rightarrow 6^x - 5^x = f'(c_2) \cdot 1.\ c_2 \in (5;6)$$

$E_5)$ ec. derivate:

$$f'(c_1) = f'(c_2),\ c_1 \in (2;3),\ c_2 \in (5;6)$$

$$f'(t) = (t^x)' = x t^{x-1}$$

$$\Rightarrow x c_1^{x-1} = x c_2^{x-1} \Big| : x \neq 0$$

$$c_1 \neq c_2$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$. Arătați că

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\ \forall x,y\in[1,\infty)$$

E_1) Deoarece relația din enunț e simetrică în x și y, putem presupune o ordonare între ele, $x<y$

E_2) Fie $x<y \Rightarrow f:[x,y]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$ e cont. pe $[x,y]$, derivabilă pe $(x,y)\Rightarrow\exists\, c\in(x,y)$ a.î. $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$ (*)

(T. LUI LAGRANGE)

E_3) Trecând la module $\Rightarrow$

$$|f(y)-f(x)|=|f'(c)|\,|y-x|$$

E_4) Rămâne să arătăm că $|f'(c)|\le 1$

E_5) $f'(x)=(e^{-x})'=e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}=-\frac{1}{e^x}$

$$\Rightarrow f'(c)=-\frac{1}{e^c}\Rightarrow|f'(c)|=\frac{1}{e^c}$$

E_6) Dar, $c\in(x,y)$, $x\ge 1\Rightarrow c>1\Rightarrow e^c>e$

$$\Rightarrow\frac{1}{e^c}<\frac{1}{e}<1\Rightarrow|f'(c)|<1$$

$$\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le|x-y|$$

Prof. Ovidiu Băcescu

FOLOSIREA T. LUI LAGRANGE ÎN CALCULUL LIMITELOR DE TIPUL $f(x+1)-f(x)$

E_1) se scrie T. Lagrange: „Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f cont pe $[a,b]$, f derivabilă pe $(a,b) \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ a.î. $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

E_2) se înlocuiește $f(x+1)-f(x)$ cu $f'(c)(x+1-x)=f'(c)$

E_3) uneori se cere limita, se folosește că $c\in(x,x+1)$

Obs.: Deoarece pentru fiecare interval de tipul $(x,x+1)$ avem o valoare a lui $c \Rightarrow c$ depinde de $x \Rightarrow$ notăm $c=c_x$

Exp: Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\ln x)$.

Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$

E_1) apare $f(x+1)-f(x)$, ne gândim la Lagrange, fie $f:[x,x+1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\ln(\ln t)$ cu f cont pe $[x,x+1]$, f derivabilă pe $(x,x+1) \Rightarrow \exists\, c_x\in(x,x+1)$ a.î. $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)(x+1-x)$

E_2) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(c_x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln c_x}\cdot\frac{1}{c_x}}{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\ln x}{c_x\cdot\ln c_x}$

E_3) Dar, $x<c_x<x+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c_x}<\dfrac{1}{x}\ /\cdot x \Rightarrow \dfrac{x}{x+1}<\dfrac{x}{c_x}<1$

E_4) $x<c_x<x+1 \Rightarrow \ln x<\ln c_x<\ln(x+1) \Rightarrow \dfrac{1}{\ln(x+1)}<\dfrac{1}{\ln c_x}<\dfrac{1}{\ln x}\ /\cdot\ln x$

$\Rightarrow \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}<\dfrac{\ln x}{\ln c_x}<1$

E_5) $\dfrac{x}{x+1}<\dfrac{x}{c_x}<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{c_x}\le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{c_x}=1$

E_6) $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}\ l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$

E_7) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{c_x}\cdot\dfrac{\ln x}{\ln c_x}=1\cdot 1=1$

Prof. Ovidiu Badescu