PROBLEME NONSTANDARD DE SISTEME LINIARE

1) Fie $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$, rezolvați sist. dacă e compat determinat

2) $\begin{cases} 9x-y-z=2 \\ x+4y-2z=10 \\ x-2y+2z=b \end{cases}$, găsiți $a,b\in\mathbb{R}$ dacă sist e incompatibil

3) $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$, găsiți $m,n,p\in\mathbb{R}$ dacă sist. e compatibil iar rang $A=2$

4) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, găsiți $a,b\in\mathbb{R}$ dacă sist. e incompatibil

5) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+9z=b \end{cases}$, arătați că $\exists$ o infinit de valori pt a,b a. î. S are o soluție (x,y,z) cu x,y,z progresie aritm

6) $\begin{cases} 2x+3y-z=6 \\ 4x-y+2z=-2 \\ mx+y-z=2 \end{cases}$, x are m dacă S are o infinit de soluții

7) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$ Arătați că S are soluție, $\forall m\in\mathbb{R}$

8) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y-16z=0 \end{cases}$, găsiți soluțiile (x_0,y_0,z_0) cu toate componentele întregi a. î. $x_0^2+y_0^2+z_0^2\le 75$

9) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$ are soluția (x_0,y_0,z_0)

Arătați că $\dfrac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}$ constantă

10) $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$

Găsiți $p\in\mathbb{R}$ dacă sist are o soluție (x_0,y_0,z_0,t_0) cu $z_0=t_0=0$

11) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$

Găsiți $m\in\mathbb{R}$ dacă sist are o soluție de forma $(a,b,-1)$

12) $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$ Găsiți $m\in\mathbb{R}$ dacă sist are soluții (x_0,y_0,z_0) care verifică $x_0+y_0+z_0=4$

13) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ cu (x_0,y_0,z_0) soluție

Calculați $\min\{x_0^2+y_0^2+z_0^2\}$

14) Fie ΔABC de laturi a,b,c și $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$ cu (x_0,y_0,z_0) soluție

Arătați că $x_0,y_0,z_0\in(-1,1)$

15) Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ și sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$. Se știe că $\det S=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Dacă $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, arătați că sist are o infinit de soluții (x,y,z) cu $x^2+y^2=z-1$

Fie $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$

Rezolvați sistemul dacă e compatibil determinat

$E_1)$ $\det S \neq 0$, $\det S = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$. Dacă avem un sistem cu determinant ce depinde de un parametru, trebuie să îl scriem ca produs folosind proprietățile determinanților

$E_2)$ $\det S = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{l_3+l_2+l_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$

$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a^2+2-1-2a) =$

$= (a+2)(a^2-2a+1) = (a+2)(a-1)^2$

$E_3)$ $\det S \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$ și $a \neq 1$

$E_4)$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} \overset{C_1=C_3}{=\!=\!=} 0$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} \overset{C_2=C_3}{=\!=\!=} 0$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \det S = (a+2)(a-1)^2$

$E_5)$ $x = \dfrac{\Delta_x}{\det S} = \dfrac{0}{\det S} = 0$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\det S} = \dfrac{0}{\det S} = 0$; $z = \dfrac{\det S}{\det S} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Pădescu

Fie $\begin{cases} ax - y - z = 2 \\ x + 4y - 2z = 10 \\ x - 2y + 2z = 6 \end{cases}$

Găsiți a și b dacă S incompatibil

E_1) S incompatibil $\Leftrightarrow \begin{cases} \det S = 0 \text{ și} \\ \exists \Delta_c \neq 0 \end{cases}$

E_2) $\det S = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8a + 2 + 2 + 4 - 4a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4a + 10 = 0 \Rightarrow 4a = -10$

$\Rightarrow a = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$

E_3) Îl a găsi Δ_c, calculăm rang A, fie coef lui x de pe linia 2 $\Rightarrow |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 1$

bordăm cu elementele din l_3 și coef lui y

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 2$

bordăm în continuare $\Rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \text{rang } A = 2, \ \Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -\frac{20b}{2} - 10 - 4 - 8 - 50 + b = 0$

$\Leftrightarrow -9b - 72 \neq 0 \Rightarrow 9b \neq -72 \Rightarrow b \neq -8$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$

Găsiți $m, n, p \in \mathbb{R}$ dacă sist e compatibil iar rang $A=2$

E_1) rang $A=?$

$|2|=2\neq 0 \Rightarrow$ rang $A\geq 1$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 9+3 = 12 \neq 0$

$\Rightarrow$ rang $A \geq 2$

E_2) Pt că rang $A=2 \Rightarrow$ toți determinanții de ordin 3 obținuți prin bordare sunt nuli $\Rightarrow$

$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & m \\ 5 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 0$ și $\Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 9 & 1 \\ 5 & -6 & n \end{vmatrix} = 0$

E_3) $\Delta_{C_1}=0 \Rightarrow 180-15m-24-180+12m+30=0$

$\Rightarrow -3m+6=0 \Rightarrow \boxed{m=2}$

$\Delta_{C_2}=0 \Rightarrow 18n-15+30+225+12+3n=0$

$\Rightarrow 21n+252=0 \Rightarrow 21n=-252 \Rightarrow \boxed{n=-12}$

E_3) sist compatibil $\Rightarrow$ { toți $\Delta_C=0$ sau $\nexists \Delta_C$ / sau / rang A = rang $\bar{A}$

$\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+2z+t=3 \\ 5x-6y+10z-12t=p \end{cases}$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_C = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 18p-45+6+45+36+3p=0$

$21p+42=0$

$\Rightarrow \boxed{p=-2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$ Găsiți $a,b \in \mathbb{R}$ dacă sist este incompatibil

---

E1) $\det S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & a \end{vmatrix} = -a+14-2+7+1-4a =$

$= -5a+20$

E2) Dacă $\det S \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 4 \Rightarrow$ sist se poate rezolva cu CRAMER deci e compatibil ceea ce e fals pt că trebuie să fie incompatibil

E3) E necesar așadar ca $\det S = 0 \Leftrightarrow a = 4$

În acest caz, sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+4z=b \end{cases}$,

calculăm rang A = ?

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 1$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rang } A \geq 2$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rang } A = 2$

E4) Pt ca sist să fie incompatibil trebuie ca

met I: $\exists \Delta_c \neq 0$ sau met II: $\text{rang } A \neq \text{rang } \bar{A}$

met I: $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix} = -b+14-2+7+1-4b$

$= -5b+20$

$\Delta_c \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$

met II: $\text{rang } \bar{A} = ?$, evident $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } \bar{A} \geq 2$,

$\text{rang } \bar{A} > 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$. Arătați că $\exists$ o infinit. de valori ale lui a și b pentru care sist. admite o soluție (x,y,z) cu x,y,z în progr aritmetică

E_1) x,y,z în progr aritm $\Leftrightarrow x+z=2y \Leftrightarrow$

$x-2y+z=0$

E_2) Ar trebui ca soluția să verifice $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

E_3) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ și punem condiția

ca soluția să verifice și ec.: $7x-y+az=b$

E_4) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$, $\det S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1+2-4+1+2-4 =$

$= 5-9 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow S$ compatibil

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1+0-2-0+2-2 = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

Analog $y = \frac{1}{4}$, $z = -\frac{1}{4}$

E_5) înlocuim în $7x-y+az=b \Rightarrow \frac{21}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a = 4 \cdot 4$

$\Rightarrow 20-a=4b \Rightarrow a = 20-4b \Rightarrow$ o infinitate de valori pt a și b pt că b poate fi oricât din $\mathbb{R}$ și pt $\forall$ valoare a lui b, există a.

Fie $\begin{cases} 2x+3y-z=6 \\ -4x-y+2z=-2 \\ mx+y-z=2 \end{cases}$

$m=?$ pt care S are o infinit de soluții

E_1) dacă $\det S \neq 0 \Rightarrow S$ are soluție unică

dacă $\det S=0$ și (toți $\Delta_c=0$ sau $\nexists \Delta_c$) $\Rightarrow S$ are o infinit de soluții

dacă $\det S=0$ și $\exists \Delta_c \neq 0 \Rightarrow S$ incompatibil (nu are soluție)

E_2) ar trebui ca $\det S=0$ și (toți $\Delta_c=0$ sau $\nexists \Delta_c$)

E_3) $\det S = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2+6m+4-m-4-12$

$= 5m-10$

$\det S=0 \Rightarrow m=2$

E_4) pt a studia ce s întâmplă cu Δ_c,

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $\det A=0$, rang $A=?$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -2+12 = 10 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 2$ / $\det A=0$ $\Rightarrow$ rang $A=2$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4-12-24+12+4+24=0$

$\Rightarrow$ sist compatibil

E_5) sist principal $\begin{cases} 2x+3y=5+z \\ -4x-y=8-2z \end{cases}$ $\Rightarrow$ are o infinit de soluții

unde $z=\alpha$

Fie $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$

Arătați că sistemul are soluție, $\forall m \in \mathbb{R}$

E_1) $\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 2+m^2+1-1-m-2m =$

$= m^2-3m+2$

E_2) Caz I: $m^2-3m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \Rightarrow \det S \neq 0$

$\Rightarrow$ se rezolvă cu Cramer, deci sist are soluție

E_3) Caz II: $m^2-3m+2=0 \Leftrightarrow m \in \{1,2\}$

Dacă $m=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+2z=-1 \end{cases}$

rang $A=?$, $|1|=1 \neq 0$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A=2$

bordăm $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{l_1=l_2}{=\!=} 0 \Rightarrow$ compatibil pt că $\nexists$ alt Δ_c

Dacă $m=2 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ x+2y+2z=-1 \end{cases}$

$|1|=1 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A=2$, calc.

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1+1+0-0-4+4 = 0$

$\nexists$ alt $\Delta_c \Rightarrow$ compatibil

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y+az=0 \end{cases}$

Dacă $a=-16$, găsiți soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului cu toate componentele întregi a. î.
$x_0^2+y_0^2+z_0^2 \leq 75$

$E_1)$ $a=-16 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y-16z=0 \end{cases}$

$E_2)$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -16 \end{vmatrix} = \dots = 0$

$E_3)$ $\operatorname{rang} A = ?$, $|1|=1\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$. Dacă bordăm $\Rightarrow \det A = 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, $A_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ sist compatibil

$E_4)$ Sist. principal $\begin{cases} x+2y=-3\alpha \\ 2x+3y=-\alpha \end{cases}$, $z=\alpha$

$\begin{cases} x+2y=-3\alpha \\ 2x+3y=-\alpha \end{cases} \Big| \cdot(-2)$

$-y=5\alpha \Rightarrow y=-5\alpha$, $x=7\alpha$, $z=\alpha$

$E_5)$ $(x_0, y_0, z_0)=(7\alpha, -5\alpha, \alpha)$

$E_6)$ $x_0^2+y_0^2+z_0^2 \leq 75 \Rightarrow 49\alpha^2+25\alpha^2+\alpha^2 \leq 75$

$75\alpha^2 \leq 75 \Rightarrow \alpha^2 \leq 1 \Rightarrow \alpha^2-1 \leq 0$

	-1		1
α^2-1	$+$	0 $-$ $-$	0

Deci $\alpha \in [-1, 1]$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ $(x_0, y_0, z_0) \in \{(7, -5, 1), \dots\}$

Dacă $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$, atunci

expresia $\dfrac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}$ este constantă,

$\forall (x_0, y_0, z_0)$ soluție nenulă

$E_1)$ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+0+6-1-0-3=0$

$\Rightarrow$ nu pot Cramer

$E_2)$ $\operatorname{rang} A = ?$, $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ($\det A$) $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

$E_3)$ sist. $\begin{cases} 2x+y=-\alpha \\ 3x-y=0 \end{cases}$, $z=\alpha$

$+$ $5x=-\alpha \Rightarrow x=-\dfrac{\alpha}{5}$ înlocuim

$-\dfrac{2\alpha}{5}+y=-\alpha \Rightarrow y=-\alpha+\dfrac{2\alpha}{5}=-\dfrac{3\alpha}{5}$

$E_4)$ soluția: $\left(-\dfrac{\alpha}{5}; -\dfrac{3\alpha}{5}; \alpha\right)$ ✓ atenție la înlocuire

$E_5)$ $E = \dfrac{\frac{\alpha^2}{25}+\frac{9\alpha^2}{25}+\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{25}-\frac{9\alpha^2}{25}+\alpha^2} = \dfrac{\alpha^2 \cdot \frac{1+9+25}{25}}{\alpha^2 \cdot \frac{1-9+25}{25}} = \dfrac{35}{17}$ cons

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$

Găsiți p dacă sist are o soluție (x_0, y_0, z_0, t_0) cu $z_0=t_0=0$

E_1) înlocuim $z=t=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+9y=3 \\ 5x-6y=p \end{cases}$

E_2) rezolvăm $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+9y=3 \end{cases}$ și punem condiția ca x și y să verifice ec. $5x-6y=p$

Din $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+9y=3 \end{cases} \quad | \cdot(-2)$

„+": $\quad -21y=-7 \Rightarrow y=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$

Înlocuim $\Rightarrow 2x-3y=-1 \Rightarrow 2x-3\cdot\frac{1}{3}=-1$

$\Rightarrow 2x-1=-1 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow x=0, y=\frac{1}{3}$

E_3) Dar, x și y verifică ec. (3): $5x-6y=p$

$\Rightarrow 5\cdot 0-6\cdot\frac{1}{3}=p \Rightarrow \boxed{p=-2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$

Determinați $m \in \mathbb{R}$ dacă sist are o soluție de forma $(a, b, -1)$

E_1) $(a,b,-1)$ e soluție $\Rightarrow$ verifică sistemul, înlocuim $x=a, y=b, z=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-1=0 \\ ma+b-1=m-1 \\ a+mb-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ma+b=m \\ a+mb=1 \end{cases}$$

E_2) Din $a+b=1 \Rightarrow a=1-b$, înlocuim $\Rightarrow$

$$\begin{cases} m(1-b)+b=m \\ 1-b+mb=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-mb+b=m \\ -b+mb=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b(-m+1)=0$

E_3) Dacă $m=1 \Rightarrow b$ oarecare și $a=1-b$ deci sistemul are soluție de forma $(a, b, -1)$

Dacă $m \neq 1 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow$ sistemul are o soluție de forma $(a, b, -1)$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$, sistemul are o soluție de forma $(a, b, -1)$

Prof Ovidiu Badescu

Fie $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$

Găsiți $m\in\mathbb{R}$ a.î. care sistemul are soluții (x_0, y_0, z_0) care verifică: $x_0+y_0+z_0=4$

E_1) Faptul că soluția verifică $x+y+z=4$ înseamnă că sistemul poate fi considerat de 4 ec. cu 3 necunoscute

$$\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

E_2) $\operatorname{rang} A=(?)$, $|m|=m$

Cz I: $m\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A\geq 1$ însă discuția ar fi anevoioasă

Cel mai bine ar fi să discutăm $\operatorname{rang} A$ rearanjând ordinea ecuațiilor din sistem, $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \\ x+y+z=4 \\ mx+y-z=1 \end{cases}$

E_3) $\operatorname{rang} A=?$, $|1|=1\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A\geq 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A\geq 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1+1+1+1+1=4\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A\geq 3$

Deoarece $A\in\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C}) \Rightarrow \operatorname{rang} A\leq 3 \Rightarrow \operatorname{rang} A=3$,

$$\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0, \quad \Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ C_3+C_1 \end{matrix}\begin{matrix} C_2+C_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ m & 1+m & m-1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1+m & m-1 & 1 \end{vmatrix}\overset{C_3-C_1}{=}\begin{vmatrix} \neq 0 & & \\ 2 & 2 & \\ 1+m & m-1 & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ m-1 & -m \end{vmatrix}=2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & -m \end{vmatrix}=4(-m-m+1)=4(1-2m)$$

$$\Rightarrow 1-2m=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

Fie $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

Calculați $\min\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z) \text{ soluție}\}$

$E_1)$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pt că $l_2 = l_3$

$E_2)$ rang $A = ?$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \det A \Rightarrow \text{rang } A = 2$

$E_3)$ $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ sist compatibil

$E_4)$ sist principal $\begin{cases} x-y = 1-\alpha \\ x+y = 3-\alpha \end{cases}$, $z = \alpha$

$L_1 + L_2: \; 2x = 4-2\alpha \Rightarrow x = 2-\alpha$

$L_2 - L_1: \; 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$E_5)$ soluția $(2-\alpha; 1; \alpha)$

$E_6)$ $\min(x^2+y^2+z^2) = \min((2-\alpha)^2+1^2+\alpha^2)$

$= \min(4-4\alpha+\alpha^2+1+\alpha^2) = \min(2\alpha^2-4\alpha+5)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(\alpha) = 2\alpha^2-4\alpha+5$ are minim $= \frac{\Delta}{4a} = -\frac{16-40}{8} =$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie ΔABC cu $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ și sistemul

$$\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$$

Dacă soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0), arătați că $x_0, y_0, z_0 \in (-1,1)$

E_1) Rescriem sistemul $\begin{cases} bx+ay=c \\ cx+az=b \\ cy+bz=a \end{cases}$

E_2) $\det A = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = 0+0+0-0-abc-abc = -2abc \neq 0$

$\Rightarrow$ că a, b, c laturi

E_3) $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = 0+a^3+0-0-ac^2-ab^2 = a(a^2-b^2-c^2)$

Analog, $\Delta_y = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b(b^2-a^2-c^2)$ și $\Delta_z = c(c^2-a^2-b^2)$

E_4) $x = \frac{\Delta_x}{\det S} = \frac{a(a^2-b^2-c^2)}{-2abc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y = \frac{\Delta_y}{\det S} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

și $z = \frac{\Delta_z}{\det S} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

E_5) Dar, din $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos A$,

analog celelalte $\Rightarrow x = \cos A$, $y = \cos B$, $z = \cos C$

E_6) Deoarece $\measuredangle$ unghi din $\Delta ABC \in (0, \pi) \Rightarrow$

$\cos(\measuredangle) \in (-1,1) \Rightarrow x, y, z \in (-1,1)$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ și $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$. Să se

$\det S = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Dacă $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, arătați că S are o infinitate de soluții (x,y,z) cu

$x^2+y^2 = z-1$

$E_1)$ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \mid \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)=0$

$\Rightarrow \underset{\geq 0}{(a-b)^2}+\underset{\geq 0}{(b-c)^2}+\underset{\geq 0}{(b-c)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ b-c=0 \end{cases}$

$\Rightarrow a=b=c$ înlocuim în sistem

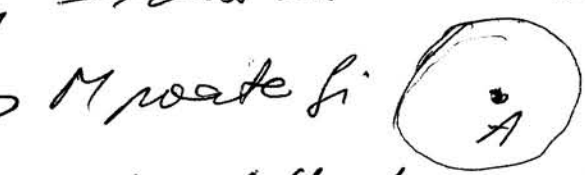
$E_2)$ $ax+ay+az=a \mid : a \neq 0 \Rightarrow x+y+z=1$

$\Rightarrow z=1-x-y$ soluții

$E_3)$ Arăt. că sist are o inf. de soluții care vf. $z=1-x-y$ și $x^2+y^2=z-1$, înlocuiesc z din prima în a doua $\Rightarrow x^2+y^2=1-x-y-1 \Rightarrow$

$E_4) \Rightarrow x^2-x+y^2-y=0 \Rightarrow \left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-2y\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

$E_5) \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}} \Rightarrow$ dist de la $M(x,y)$ la $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ este $\sqrt{\frac{2}{4}} \Rightarrow M$ poate fi



o inf de pct pe cercul centru $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $R=\sqrt{\frac{2}{4}}$

$\Rightarrow$ infinit de pct

Prof. Ovidiu Badescu