Data:

CLASA A XI-A

SETUL 4
ANALIZĂ XI, partea 3

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar 2017-2018

DERIVABILITATE

PUNCTE UNGHIULARE, PUNCTE DE ÎNTOARCERE

FORMULE DE DERIVARE

DERIVAREA FUNCȚIILOR COMPUSE

ECUAȚIA TANGENTEI, PANTA TANGENTEI

MONOTONIA FOLOSIND DERIVATA I

CONVEXITATEA FOLOSIND DERIVATA II

TEOREMELE LUI: FERMAT, LAGRANGE, ROLLE

ȘIRUL LUI ROLLE

REGULILE LUI L'HOPITAL

REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

REPREZENTAREA GRAFICĂ A CONICELOR

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

(M22) DEFINIȚIA DERIVABILITĂȚII UNEI FUNCȚII FĂRĂ ACOLADE

E_1) f este derivabilă în $x=\alpha$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R}$ (este număr)

• f are derivată în $x=\alpha$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \overline{\mathbb{R}}$ (poate fi număr sau $\pm\infty$)

Obs 1: Dacă f derivabilă în $x=\alpha$, e NECESAR ca f continuă în $x=\alpha$, de aceea e util să studiem continuitatea lui f în $x=\alpha$ și: dacă f nu e continuă în $x=\alpha \Rightarrow f$ nu e derivabilă în $x=\alpha$, dar f poate avea derivată în $x=\alpha$.

dacă f e continuă în $x=\alpha$ $\Rightarrow f$ poate fi sau poate să nu fie derivabilă în $x=\alpha$

Obs 2: dacă f este derivabilă (sau f are derivată) în $x=\alpha \Rightarrow f'(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Obs 3: dacă $f:[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ sau dacă $f:(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$, pentru a studia derivabilitatea în $x=\alpha$ e SUFICIENT să calculăm doar o derivată laterală $\lim \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Exp 1: Studiați derivabilitatea lui $f(x)=x^2-3x+1$ în $x=2$

E_1) f cont. în $x=2$ ca fct elementară

E_2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+1-(-1)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = 1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ derivabilă în $x=2$ și f are derivată în $x=2$ și $f'(2)=1$

Exp 2: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$, studiați derivabilitatea lui f în $x=1$

E_1) f cont în $x=1$ ca fct elementară

E_2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}} =$

$\overset{\frac{1}{0^+}}{=} \infty \Rightarrow f$ nu e derivabilă în $x=1$ dar f are derivată în $x=1$ și $f'(1)=\infty$

Exp 3: Studiați derivabilitatea lui $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ în $x=0$

E_1) f cont în $x=0$ ca fct elementară

E_2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

E_3) $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$

$f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} \infty$

$\Rightarrow f$ nu e deriv în $x=0$, f nu are derivată în $x=0$ și $\nexists f'(0)$

Exp 4:

(M8) STUDIEREA DERIVABILITĂȚII UNEI FUNCȚII CU ACOLADE DE TIPUL (N2)

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x<\alpha \\ f_2(x), & x\geq\alpha \end{cases}$$

E_1) f derivabilă pe $(-\infty;\alpha)$ și pe (α,∞), studiem în $x=\alpha$

E_2) deși e opțională, este preferabilă studierea continuității în $x=\alpha$

- dacă f nu e cont. în $x=\alpha \Rightarrow f$ nu e derivabilă în $x=\alpha$, STOP
- dacă f e cont în $x=\alpha \Rightarrow E_3$

E_3) calculăm $f'_s(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ și $f'_d(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Dacă $f'_s(\alpha)=f'_d(\alpha)\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă în $x=\alpha$

Dacă $f'_s(\alpha)=f'_d(\alpha)=+\infty$ sau $=-\infty \Rightarrow f$ are derivată în $x=\alpha$ dar nu e derivabilă

Dacă $f'_s(\alpha)\neq f'_d(\alpha) \Rightarrow f$ nu e derivabilă, nu are derivată

Exp: $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<2 \\ x^2-4x+5, & x\geq 2 \end{cases}$ Studiați derivabilitatea în $x=2$

E_1) f cont în $x=2$ (?)

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} (x-1)=1$; $l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (x^2-4x+5)=1$; $f(2)=1$

$\Rightarrow f$ cont în $x=2$

E_2) f deriv în $x=2$

$$f'_s(2)=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \frac{x-1-1}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} 1=1$$

$$f'_d(2)=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \frac{x^2-4x+5-1}{x-2} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \frac{(x-2)^2}{x-2}=0$$

$\Rightarrow$ nu e deriv în $x=2$

(M2) DETERMINAREA DOMENIULUI DE DERIVABILITATE (N3)

E_1) se calculează cu formule $f'(x)$, se pun eventuale condiții noi pentru $f'(x) \Rightarrow x \neq \alpha_1, x \neq \alpha_2, \dots$

E_2) se studiază cu definiția dacă f e derivabilă în $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (punctele găsite din eventualele condiții pt. $f'(x)$) și se studiază cu definiția dacă f e derivabilă în capetele închise ale D_f (dacă acestea există)

E_3) domeniul de derivabilitate va fi domeniul funcției din care scădem punctele din eventualele condiții și capetele închise ale domeniului în care f nu e derivabilă (cu definiția)

Exemplul 1: $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$, se cere domeniul de derivabilitate

E_1) Cond$_1$: $x^2 - x \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

E_2) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x}} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

E_3) Cond noi: $x^2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ și $x \neq 1$

E_4) Studiem cu definiția dacă f derivabilă în $x = 0$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{x^2-x} - 0}{x - 0} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -\sqrt{\frac{x-1}{x}} \overset{\frac{-1}{0}}{=} -\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow$$

f nu e derivabilă în $x = 0$

E_5) Studiem cu def. dacă f derivabilă în $x = 1$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2-x} - 0}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{\frac{x}{x-1}} \overset{\frac{1}{0_+}}{=} \infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ nu e derivabilă în } x = 1$$

E_6) deoarece capetele închise ale D_f sunt tot $x = 0, x = 1 \Rightarrow$ nu mai avem altceva în care să studiem

E_7) $D_{f'} = D_f \setminus \{0; 1\} = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Exemplul 2: $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\arcsin x$ și cere domeniul de derivabilitate

E_1) $f'(x) = 1 \cdot \arcsin x + (x-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

E_2) Cond noi: $1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

E_3) studiem cu def în $x = -1$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{(x-1)\arcsin x + 2\arcsin(-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{(x-1)\arcsin x - 2 \cdot \frac{\pi}{2}}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1 \cdot \arcsin x + \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} - 0}{1} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(1-x)(1+x)}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{-(x-1)}{1+x}} \overset{-\frac{\pi}{2} - \infty}{=} -\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow$$

f nu e deriv în $x = -1$

E_4) Studiem cu definiția în $x = 1$, e analog până la $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(\arcsin x + \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$

$$= \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(1-x)(1+x)}} \overset{\frac{\pi}{2} - 0}{=} \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ derivabilă în $x = 1$

E_6) capetele închise ale D_f sunt tot $x = -1$ și $x = 1 \Rightarrow$ nu avem alte rd în care să studiem

E_7) $D_{f'} = D_f \setminus \{-1\} = (-1; 1]$

(M2) CONDIȚIA CA O FUNCȚIE CE CONȚINE MODULE SĂ FIE DERIVABILĂ (N3)

Dacă $f(x)=|x-a| \Rightarrow f$ nu e deriv. în $x=a$

Dacă $f(x)=g(x)\cdot|f(x)| \Rightarrow f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ < $f(x)$ are semn constant (nu are rădăc)
sau
toate rad. lui $f(x)$ sunt rădăcini pt $g(x)$ și suma ordinelor de multiplicitate a rădăc să fie pară

Ex: $f(x)=x|x-a|+2|x-b|$

Se cere $a, b=?$ pt. care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$

E_1) Dacă $a\neq b \Rightarrow f$ nu e derivabilă în $x=b$, fals $\Rightarrow$ este necesar ca $a=b$

E_2) $f(x)=x\cdot|x-a|+2|x-a|=(x+2)|x-a|$

E_3) pt ca f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ ar trebui ca toate rădăcinile lui $x-a$ să fie rădăcini pentru $x+2$ și suma ordinelor să fie pară

E_4) rădăcinile pentru $x-a$ sunt $x=a$, iar $x=a$ e rădăcină pentru $x+2 \Leftrightarrow a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$

E_5) deci, $a=b=-2$

PUNCT UNGHIULAR. PUNCT DE ÎNTOARCERE

(N2)

$x=\alpha$ punct unghiular pt G_f dacă:

1) f cont în $x=\alpha$

2) f nu e derivab în $x=\alpha$

3) $\exists f'_s(\alpha), f'_d(\alpha)$, cel puțin una finită

Obs.: se notează $x=\alpha$ pct $\nexists$

$x=\alpha$ punct de întoarcere pt G_f dacă:

1) f cont în $x=\alpha$

2) f nu e derivab în $x=\alpha$

3) $(f'_s(\alpha)=-\infty$ și $f'_d(\alpha)=\infty)$ sau $(f'_s(\alpha)=\infty$ și $f'_d(\alpha)=-\infty)$

Obs.: se notează $x=\alpha$ pct $\leftarrow$

Ex1: studiați dacă $x=1$ este pct $\nexists$ sau pct de $\leftarrow$ pt G_f,

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$$

E_1) f cont în $x=1$ (?)

$$l_s(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-1)=0$$

$$l_d(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2-1)=0$$

$\Rightarrow f$ cont în $x=1$ (1)

$f(1)=1-1=0$

E_2) $f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x-1-0}{x-1}=1$

$f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2-1-0}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)=2$

$f'_s(1)\neq f'_d(1)\Rightarrow f$ nu e deriv în $x=1$ (2)

E_3) $\exists f'_s(1), f'_d(1)$, cel puțin una finită (3)

E_4) din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow x=1$ e pct $\nexists$

Ex2: studiați dacă $x=0$ este pct $\nexists$ sau de $\leftarrow$ pt G_f,

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

E_1) f cont în $x=0$ (?)

$$l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt[3]{x^2}=0$$

$$l_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt[3]{x^2}=0$$

$\Rightarrow f$ cont în $x=0$ (1)

$f(0)=\sqrt[3]{0}=0$

E_2) $f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}x^{-\frac{1}{3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\overset{\frac{1}{0-}}{=\!=}-\infty$

$f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{-\frac{1}{3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\overset{\frac{1}{0+}}{=\!=}\infty$

$\Rightarrow f'_s(0)\neq f'_d(0)$ (2)

E_3) $f'_s(0)=-\infty$, $f'_d(0)=\infty$ (3)

E_4) din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow x=0$ e pct de $\leftarrow$

TABEL CU DERIVATE DE MEMORAT

$c' = 0$	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

TABEL CU DERIVATE CE SE DEDUC

$x' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Exp 1: $(2^x)' = 2^x \ln 2$

$4' = 0$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

OPERAȚII CU FUNCȚII DERIVABILE

a) $(f+g)' = f' + g'$

$(f-g)' = f' - g'$

b) $(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$

c) $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Obs: $(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4)' = f_1' f_2 f_3 f_4 + f_1 f_2' f_3 f_4 +$

$+ f_1 f_2 f_3' f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4'$

Exp: $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$. Se cere $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x^3 - (\ln x) \cdot (x^3)'}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}$$

DERIVAREA FUNCȚIILOR COMPUSE

(N1)

se folosesc trei reguli de derivare

$$\boxed{(f(u))' = f'(u)\cdot u'} \qquad \boxed{(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'}$$

$$\boxed{(u^a)' = a\cdot u^{a-1}\cdot u'}$$

și aceste reguli se folosesc dacă argumentul funcției nu este x ci o altă funcție care depinde de x notată u

Obs.: dacă o funcție este la o anumită putere, derivăm întâi ca și u^a adică $(u^a)' = a u^{a-1}\cdot u'$

Exp 1: $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' =$

$= (\cos 3x)\cdot 3 = 3\cos 3x$

Exp 2: $\left(\ln \frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' =$

$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)'\cdot(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

Exp 3: $\left(\sin^3(5x)\right)' = 3\sin^2(5x)\cdot(\sin 5x)' =$

$= 3\sin^2(5x)\cdot(\cos 5x)\cdot(5x)' =$

$= 3\sin^2(5x)\cdot(\cos 5x)\cdot 5 =$

$= 15\sin^2(5x)\cdot(\cos 5x)$

Exp 4: $\left(2^{\sin x}\right)' = 2^{\sin x}\cdot \ln 2 \cdot (\sin x)' =$

$= 2^{\sin x}\cdot \ln 2 \cdot \cos x$

Exp 5: $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' =$

$= 2\sin x \cdot \cos x$

Exp 6: $\left(\sin(\ln(\cos x))\right)' =$

$= \cos(\ln(\cos x))\cdot(\ln(\cos x))' =$

$= \cos(\ln(\cos x))\cdot \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' =$

$= \cos(\ln(\cos x))\cdot \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) =$

$= -\cos(\ln(\cos x))\cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

Exp 6: $\left(2^{\sin^3 x}\right)' = 2^{\sin^3 x}\cdot \ln 2 \cdot (\sin^3 x)' =$

$= 2^{\sin^3 x}\cdot \ln 2 \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$

ECUAȚIA TANGENTEI LA GRAFICUL LUI f

(N1)

a) Dacă f derivabilă în $x=a \Rightarrow$ ec. tangentei la G_f este: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

b) Dacă $f'(a) = \pm\infty \Rightarrow$ ec. tg la G_f este $x = a$

Obs: panta tangentei (coeficientul unghiular al tangentei) este $m_t = f'(a)$

Ex.: Găsiți ec. tg în $M(1;5)$ pentru $f(x) = x^5 + 3x + 1$

$E_1)$ $f'(x) = 5x^4 + 3 \Rightarrow f'(1) = 8$; $f(1) = 1 + 3 \cdot 1 = 5$

$E_2)$ ec. tg este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 5 = 8(x-1)$

$\Rightarrow y - 5 = 8x - 8 \Rightarrow 8x - y - 3 = 0$

Ex 2: $f: [1;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, se cere ec. tg în $x=1$

$E_1)$ $f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$E_2)$ $f'(1) \overset{\frac{1}{0_+}}{=\!=} \infty \Rightarrow$ ec. tg este $x = 1$

(M2) DERIVAREA FUNCȚIILOR CE ÎL CONȚIN PE x ATÂT LA BAZĂ CÂT ȘI LA EXPONENT (N3)

$$(f^g)' = \underbrace{f^g \cdot \ln f \cdot g'}_{f \text{ constant}, g \text{ funcție}} + \underbrace{g f^{g-1} \cdot f'}_{f \text{ funcție}, g \text{ const.}}$$

$$\Rightarrow (f^g)' = f^g \left(\ln f \cdot g' + g \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

Exp: Fie $f(x) = x^{\sin x}$, calculați $f'(x)$

E_1) Se deduce formula pentru f^g ca mai sus

$$\Rightarrow (f^g)' = f^g \left(\ln f \cdot g' + g \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

$$E_2) (x^{\sin x})' = x^{\sin x} \left(\ln x \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot \frac{x'}{x} \right)$$

$$= x^{\sin x} \left(\ln x \cdot \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$(f^g)' = (e^{g \ln f})' = e^{g \ln f} \cdot \ln e (g \ln f)' =$$

$$= f^g \cdot \left(g' \ln f + g \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

(M2) DERIVATELE DE ORDIN SUPERIOR (N3)

• se pot deduce (dar sunt și formule care pot fi aplicate direct)

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-a)^{n+1}}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

• aceste formule se demonstrează prin inducție, însă doar dacă se cere în enunț le demonstrăm

Ex 1: arătați că $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \geq 1$

I $P(1): (\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \sin x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos x \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} \Rightarrow \cos x = \cos x$ adev

II Pp. $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev unde

$P(k): (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

$P(k+1): (\sin x)^{(k+1)} = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$

Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$,

derivăm $\Rightarrow (\sin x)^{(k+1)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{k\pi}{2}\right)'$

$\Leftrightarrow (\sin x)^{(k+1)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. Este suficient să arăt. că $\sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

Cum $\sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} =$

$= \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow$

$P(n)$ adev., $\forall n \geq 1$

Ex 2: $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(4)} = \frac{(-1)^4 \cdot 4!}{(x-3)^5} = \frac{24}{(x-3)^5}$

Ex 3: $\left(\ln(x-3)\right)^{(6)} = \left(\left(\ln(x-3)\right)'\right)^{(5)} =$

$= \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(5)} = \frac{(-1)^5 \cdot 5!}{(x-3)^6}$

Ex 4: $\left(\ln(x^2-3x+2)\right)^{(4)} =$

$= \left(\frac{1}{x^2-3x+2} \cdot (2x-3)\right)^{(3)} =$

$= \left(\frac{2x-3}{x^2-3x+2}\right)^{(3)} = \left(\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}\right)^{(3)}$

Dar, $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} =$

$= \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$

Egalând coef $\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=-3 \end{cases}$

adunăm $\Rightarrow -A=-1 \Rightarrow A=1$, înlocuim

$\Rightarrow B=1$

Așadar, $\left(\ln(x^2-3x+2)\right)^{(4)} = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)^{(3)} =$

$= \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{(x-1)^4} + \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{(x-2)^4}$

FORMULA LUI LEIBNIZ

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$$

Exp:

E1) $(\sin x\cdot x^2)^{(8)}=\sum_{k=0}^{8} C_8^k (\sin x)^{(8-k)}\cdot (x^2)^{(k)}=$

E2) $=C_8^0(\sin x)^{(8)}(x^2)^{(0)}+C_8^1(\sin x)^{(7)}(x^2)'+C_8^2(\sin x)^{(6)}(x^2)''+\dots+C_8^8(\sin x)^{(0)}(x^2)^{(8)}$

E3) Dar, $(x^2)^{(0)}=x^2$; $(x^2)'=2x$, $(x^2)''=2$, $(x^2)'''=0$

$\Rightarrow (x^2)^{(p)}=0,\ \forall p\geq 3$

E4) $\Rightarrow (\sin x\cdot x^2)^{(8)}=C_8^0(\sin x)^{(8)}x^2+C_8^1(\sin x)^{(7)}\cdot 2x+C_8^2(\sin x)^{(6)}\cdot 2+0$

E5) Deoarece $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

E6) $(\sin x\cdot x^2)^{(8)}=1\cdot\sin\left(x+8\cdot\frac{\pi}{2}\right)+8\cdot\sin\left(x+7\cdot\frac{\pi}{2}\right)2x+\frac{8\cdot 7}{2}\sin\left(x+6\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$

$=\sin(x+4\pi)+16x\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)+28\sin(x+3\pi)\cdot 2$

$=\sin x+16x\cdot\sin\left(x+3\pi+\frac{\pi}{2}\right)+28\sin(x+2\pi+\pi)\cdot 2$

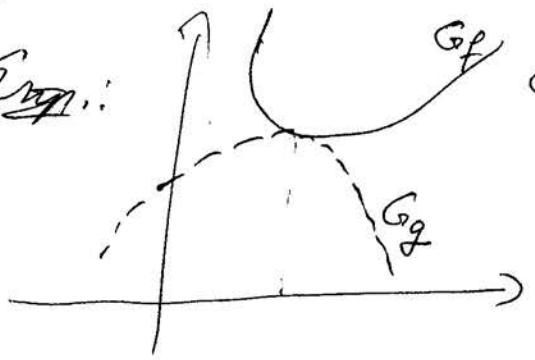
$=\sin x+16x\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+56\sin(x+\pi)$

$-\sin x+16x\cdot\cos x-56\sin x$ / s-au folosit formule

(M2) # CONDIȚIA CA DOUĂ FUNCȚII SĂ AIBĂ GRAFICELE TANGENTE ÎN $M(\alpha, \beta)$ (N3)

2 grafice tangente $\Leftrightarrow$ 2 traiectorii ce se „ciocnesc" și se întorc în direcția de unde au venit

Exp.:



G_f și G_g tangente



G_f și G_g nu sunt tangente

Pentru a fi tangente, trebuie să aibă:

a) punct comun $\Leftrightarrow f(\alpha) = g(\alpha)$

b) tangentă comună în $M \Leftrightarrow$ panta tangentei în M aceeași și a G_f și a $G_g \Leftrightarrow f'(\alpha) = g'(\alpha)$

Așadar G_f și G_g tangente în $M(\alpha, \beta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$$

Exp.: $a, b = ?$ a.î. care G_f și G_g tangente în $x = 1$

unde $f(x) = x^3 + ax + 1$, $g(x) = -x^2 + x + b$

E_1) $\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases}$

E_2) $f(1) = 1 + a + 1 = 2 + a$
$g(1) = -1 + 1 + b = b$
$\Rightarrow \boxed{2 + a = b}$

E_3) $f'(x) = 3x^2 + a$
$g'(x) = -2x + 1$

$f'(1) = 3 + a$
$g'(1) = -1$
$\Rightarrow 3 + a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -4}$

$\boxed{b = -2}$

FUNCȚII CU DERIVATA NULĂ (N2)

1) Dacă $f'(x)=0$ pe un interval $\Rightarrow f(x)=k$ (constantă) pe acel interval, pt a afla constanta dăm o valoare lui x

2) Dacă $f'(x)=g'(x)$ pe un interval $\Rightarrow f(x)$ și $g(x)$ diferă printr-o constantă pe acel interval, pentru a-i afla constanta, calculăm într-o valoare oarecare

---

Exemplu: Arătați că: $\sin^2 x+\cos^2 x=1, \forall x\in\mathbb{R}$

E_1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

E_2) $f'(x)=2\sin x\cdot\cos x+2\cos x\cdot(-\sin x)=0 \Rightarrow f$ este constantă pe acel interval, $f(x)=k, \forall x\in\mathbb{R}$ $\Big\}\Rightarrow$

E_3) $f(0)=\sin^2 0+\cos^2 0=0+1 \Rightarrow f(0)=1$

$\Rightarrow f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1, \forall x\in\mathbb{R}$

MONOTONIA FUNCȚIILOR FOLOSIND PRIMA DERIVATĂ

(N1)

$f'(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } I \\ f \nearrow \text{ pe } I \end{cases}$

$f'(x)<0 \Rightarrow \begin{cases} f_s \searrow \text{ pe } I \\ f \searrow \text{ pe } I \end{cases}$

$f'(x)\geq 0 \Rightarrow f \nearrow$ pe I, nu știm dacă $f_s \nearrow$ pe I

$f'(x)\leq 0 \Rightarrow f \nearrow$ pe I, nu știm dacă $f_s \searrow$ pe I

$f'(x)\geq 0$ și $f'(x)=0$ în nr izolate $\Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } I \\ f \nearrow \text{ pe } I \end{cases}$

$f'(x)\leq 0$ și $f'(x)=0$ în nr izolate $\Rightarrow \begin{cases} f_s \searrow \text{ pe } I \\ f \searrow \text{ pe } I \end{cases}$

Obs.: la intervalele de monotonie se ia interval închis în ambele părți

---

Exp 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$

$E_1)$ $f'(x)=3x^2+1$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{3}$

nu are soluții și $3x^2+1>0$

$E_3)$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f		$\nearrow$	

$f'(x)>0$ pe $\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } \mathbb{R} \\ f \nearrow \text{ pe } \mathbb{R} \end{cases}$

Exp 2: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

$E_1)$ $f'(x)=3x^2-6x+3$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow 3(x^2-2x+1)=0$

$\Rightarrow 3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

$E_3)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

$E_4)$ $f'(x)\geq 0$ și $f'(x)=0$ în $x=1 \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } I \\ f \nearrow \text{ pe } I \end{cases}$

Exp 3: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-12x+1$

$E_1)$ $f'(x)=6x-12$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

$E_3)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(x)<0$ pe $(-\infty,2) \Rightarrow \begin{cases} f_s \searrow \text{ pe } (-\infty,2] \\ f \searrow \text{ pe } (-\infty,2] \end{cases}$

$f'(x)>0$ pe $(2,\infty) \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } [2,\infty) \\ f \nearrow \text{ pe } [2,\infty) \end{cases}$

PUNCTE CRITICE ȘI PUNCTE DE EXTREM FOLOSIND PRIMA DERIVATĂ

PUNCTE CRITICE

$x=\alpha$ pct CRITIC $\Leftrightarrow f'(\alpha)=0$

PUNCTE DE EXTREM

$x=\alpha$ pct de EXTREM $\Leftrightarrow x=\alpha$ verifică una din condițiile:

(1) $f'(\alpha)=0$, f' schimbă semnul în $x=\alpha$ și $\exists f(\alpha)$

(2) $f'(\alpha)=\backslash$, f' schimbă semnul în $x=\alpha$ și $\exists f(\alpha)$

(3) $x=\alpha$ este capăt închis al D_f pentru fct reconstante

Obs.: pt a găsi punctele de extrem:

E_1) calculăm $f'(x)$

E_2) rezolvăm $f'(x)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ eventuale rădăcini

E_3) facem tabel de variație folosind monotonia, de exemplu:

x		α_1		α_2		α_3	
f'	+ + +	0	− − −	‖	+ + +	0	+ + +
f	↗		↘		↗		↗

E_4) Dacă $f_1 \nearrow$ pe $(-\infty, \alpha_1)$, $f_1 \searrow$ pe (α_1, α_2) $\Rightarrow x=\alpha_1$ pct MAXIM, etc.

Ex 1: $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-12x+5$, se cer pct critice și pct de extrem

E_1) $f'(x)=6x-12$

E_2) $f'(x)=0 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=2 \in D_f$

E_3)

x	[−1		2	
f'	− − −	0	+ + +	
f	↘	−7	↗	

$f(2)=3\cdot 4-12\cdot 2+5=-7\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ pct critic: $x=2$

pct extrem: $x=-1$ pct MAXIM

$x=2$ pct MINIM

Ex 2: Se dă tabelul de variație pt funcția f

x	[−4		1		2		3		4		5		6)
f'	//	− −	‖	+	‖	−	‖	−	0	−	0	+	//
f	//	9	↘		↗ 5	↘ 3	↘ 1	↘ −2		↗ 8			//

$\Rightarrow$ pct critice: $x=4$ și $x=5$

pct de extrem

$x=-4$ (capăt închis al D_f)

$x=1$ nu e de extrem ($f'(1)=\backslash$, f' sch semnul în $x=1$ dar $\nexists f(1)$)

$x=2$ pct extrem (MAXIM)

$x=3$ nu e pct extrem (f' nu sch. semnul)

$x=5$ pct extrem (MINIM)

$x=6$ nu e pct de extrem (e capăt deschis al D_f)

CONVEXITATEA UNEI FUNCȚII — FOLOSIND DERIVATA DE ORDIN II

(M1)

E_1) se calculează $f'(x)$, $f''(x)$

E_2) dacă $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ convexă și G_f arată ∪

dacă $f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ concavă și G_f arată ∩

OSS1: • dacă $f''(\alpha)=0$ și f'' schimbă semnul în $x=\alpha \Rightarrow \alpha$ punct de inflexiune

• dacă $\nexists f''(\alpha)$ dar $\exists f'(\alpha) \in \mathbb{R}$ și f cont în $x=\alpha$ și f'' sch. semnul în $x=\alpha \Rightarrow \alpha$ pct de inflexiune

---

Exp 1: $f(x)=x^3-6x^2+5$, studiați convexitatea și determinați punctele de inflexiune

E_1) $f'(x)=3x^2-12x$

$f''(x)=6x-12$

E_2) $f''(x)=0 \Rightarrow x=2$

E_3)

x		2	
f''	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +$
f	∩		∪

$\Rightarrow f$ concavă pe $(-\infty, 2]$

f convexă pe $[2, \infty)$

și $x=2$ pct inflexiune

Exp 2: $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$, studiați convex. și determ pct inflexiune

E_1) $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $f''(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

E_2) cond $x \neq 0$, studiem cu definiția

dacă $\exists f''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{3}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x} = \frac{5}{3}\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ $\begin{matrix} f''_s(0)=-\infty \\ f''_d(0)=\infty \end{matrix}$

$\Rightarrow \nexists f''(0)$

E_3)

x		0	
f''	$-\ -\ -$	$\nexists$	$+\ +$
f	∩	0	∪

$\Rightarrow f$ concavă pe $(-\infty, 0]$

f convexă pe $[0, \infty)$

și $x=0$ pct inflexiune

Exp 3: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, convex, pct inflex

E_1) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, cond $x\neq 0$

E_2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=\infty \Rightarrow \exists f'(0)\in\overline{\mathbb{R}}$

E_3) $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $\nexists f''(0)$

dar f'' sch semnul în $x=0 \Rightarrow$ pct inflex.

DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI FOLOSIND MONOTONIA

(M1)

E_1) se trece totul în stânga, se consideră funcția $f(x)=$ expresia obținută, se alege D_f (eventuale condiții ce le impunem noi sau care erau date în ipoteză)

E_2) Calculăm $f'(x), f''(x), \ldots$ până găsim semnul unei derivate și eventualele rădăcini ale acelei derivate

E_3) Din derivata de ordin superior găsim monotonia funcției de grad inferior, calculăm limitele la capete (eventual doar o limită dacă e suficient), apoi semnul acestei derivate

E_4) Procedeul se repetă până obținem semnul funcției noastre

Exp.: Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x, \forall x>0$$

E_1) Inegalitatea e echivalentă cu $\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x < 0$, $\forall x>0 \Rightarrow$ fie $f(x)=\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

E_2) $f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{\frac{1+x^2}{1}}{1+x^2} = \frac{1-x^2-1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \le 0$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \notin D_f$

E_3)

x	0	∞
f'	$-\ -\ -\ -\ -$	
f	$\searrow$	

$f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x\right) \overset{0-0}{=\!=} 0$

$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x < 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x$

DETERMINAREA IMAGINII UNEI FUNCȚII (MULȚIMEA VALORILOR UNEI FUNCȚII) (N1)

E_1) se calculează $f'(x)$, se rezolvă $f'(x)=0$

E_2) se face tabel de variație

x				
f'				
f				

găsindu-se semnul lui $f'(x)$, monotonia și limitele la capetele D_f pentru $f(x)$

E_3) $Im\ f$ = reuniunea tuturor intervalelor de pe linia lui f pe care f este strict monotonă

Obs1: Dacă $Im\ f$ are toate capetele finite $\Rightarrow f$ MĂRGINITĂ, dacă $Im\ f$ are cel puțin un capăt infinit $\Rightarrow f$ NEMĂRGINITĂ

Obs2: pentru a studia mărginirea, e suficient să calculăm limitele la toate capetele D_f pe care f nu își schimbă forma și dacă toate sunt finite $\Rightarrow f$ mărginită, dacă cel puțin unul nu e finit $\Rightarrow f$ nemărginită

Ex1): Fie $f:(-2;5]\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=x^3-3x-5$. Găsiți mulțimea valorilor lui f

E_1) $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0\Rightarrow x^2=1$

$\Rightarrow x=\pm 1$

E_2)

x	$(-2$		-1		1		$5]$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-7	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	105

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=-8+6-5=-7$

$f(-1)=-1+3-5=-3$

$f(1)=1-3-5=-7$

$f(5)=125-15-5=105$

E_3) $Im\ f=(-7;-3]\cup[-7;-3]\cup[-7;105]=$

$=[-7;105]$ f mărginită

Ex2: Fie $f:(-2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3$

Se cere $Im\ f$

E_1) $f'(x)=2x$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

E_2)

x	$(-2$		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	∞

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=7$

$f(0)=3$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E_3) $Im\ f=[3;7)\cup[3;\infty)=[3;\infty)$

$\Rightarrow f$ nemărginită

STUDIEREA BIJECTIVITĂȚII UNEI FUNCȚII FOLOSIND ANALIZA MATEMATICĂ

(N1)

E_1) Se calculează $f'(x)$, se studiază monotonia lui $f(x)$

E_2) Dacă f strict monotonă $\Rightarrow$ f injectivă

Dacă f nu e strict monotonă $\Rightarrow$ f poate fi injectivă sau poate să nu fie injectivă, căutăm altă metodă (de obicei $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$)

E_3) Se face tabel de variație al lui f

x	
f'	
f	

E_4) Se calc. $\mathrm{Im}\, f$ = reuniunea tuturor intervalelor de pe linia lui $f(x)$ pe care f este strict monotonă

E_5) Dacă $\mathrm{Im}\, f = Cd_f \Rightarrow f$ surjectivă

Dacă $\mathrm{Im}\, f \neq Cd_f \Rightarrow f$ nu e surject

E_6) Deci f inj și surj $\Rightarrow f$ bijectivă

Exemplu 1: Arătați că $f:(1;\infty)\to(-1;\infty)$, $f(x)=x^3-3x+1$ este bijectivă

E_1) $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0\Rightarrow x^2=1$

$\Rightarrow x=\pm 1$. Dar, $x\in D_f \Rightarrow x=1$

E_2)

x	1	∞
f'	$+$	$+$
f	-1	$\nearrow$ ∞

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, calc. $f'(2)=12-3>0\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(1;\infty)$

$\Rightarrow f_\Delta\nearrow \Rightarrow f$ injectivă

E_3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^3-3x+1)=-1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-3x+1)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\overset{\infty(1-0+0)}{=\!=}\infty$

E_4) f cont pe $(1;\infty)$, $f_\Delta\nearrow$ pe $(1;\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=(-1;\infty)=Cd_f \Rightarrow f$ surj.

E_5) Deci f inj și f surj $\Rightarrow f$ biject.

Exemplu 2: Studiați dacă $f:[-2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+6x+1$ e a) injectivă b) surjectivă

E_1) $f'(x)=6x+6$, $f'(x)=0\Rightarrow x=-1\in D_f$

E_2)

x	-2	-1	∞
f'	$-$	0	$+$
f	1	$\searrow$ -2	$\nearrow$ ∞

$\Rightarrow f$ nu e strict monotonă, deci nu știm dacă f e inject sau nu, căutăm altă metodă

E_3) $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3x_1^2+6x_1+1=3x_2^2+6x_2+1$

$\Rightarrow 3(x_1^2-x_2^2)+6(x_1-x_2)=0\Rightarrow$

$3(x_1-x_2)(x_1+x_2)+6(x_1-x_2)=0$

$\Rightarrow 3(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0\Rightarrow \underset{\text{sau}}{x_1=x_2}$ / $x_1+x_2=-2$

E_4) deoarece $\exists x_1=-1{,}5$ și $x_2=-0{,}5$ cu $x_1\neq x_2$ și $x_1+x_2=-2\Rightarrow \exists x_1\neq x_2$ cu $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f$ NU e injectivă

E_5) pt surjectivitate, calculăm $\mathrm{Im}\, f$

$f(-2)=12-12+1=1$, $f(-1)=3-6+1=-2$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow \mathrm{Im}\, f=[-2;1]\cup[-2;\infty)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=[-2;\infty)$ și cum $Cd_f=\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ NU e surjectivă

(M8) CALCULAREA DERIVATEI DE ORDIN I ȘI II (N3) DIN FUNCȚIA INVERSĂ

E_1) Dacă se precizează în enunț că f bijectivă, se aplică direct formula, dacă nu se precizează în enunț că f bijectivă, se arată bijectivitatea lui f (pentru a exista funcție inversă, f TREBUIE să fie bijectivă)

E_2) se scrie formulele:

$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ și $(f^{-1})''(y_0)=-\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}$

x_0 se găsește folosind că $f(x_0)=y_0$ și, după ce întâim soluția x_0 folosim că f bijectivă deci soluția va fi unică

Exm 1: Fie $f:(1;\infty)\to(1;\infty)$, $f(x)=\ln x+x$ o funcție bijectivă. Calculați:

a) $(f^{-1})'(1+e)$ b) $(f^{-1})''(1+e)$

dez:

E_1) f bijectivă (din ip) $\Rightarrow \exists f^{-1}$

E_2) $(f^{-1})'(1+e)=\frac{1}{f'(x_0)}$ cu $f(x_0)=1+e$

E_3) Obs. că $f(e)=\ln e+e=1+e$ și cum f bijectivă $\Rightarrow x_0=e$. sol unică

$\Rightarrow (f^{-1})'(1+e)=\frac{1}{f'(e)}$

E_4) $f'(x)=\frac{1}{x}+1\Rightarrow f'(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$

$\Rightarrow (f^{-1})'(1+e)=\frac{1}{\frac{1+e}{e}}=\frac{e}{1+e}$

E_5) $(f^{-1})''(1+e)=-\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}$ cu $f(x_0)=e$

și s-a arătat că $x_0=e$ sol unică

$\Rightarrow (f^{-1})''(1+e)=-\frac{f''(e)}{(f'(e))^3}$

dem: E) din f bijectivă $\Rightarrow (f^{-1}\circ f)(x)=x$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x))=x\,|\,(\,)'\Rightarrow (f^{-1})'(f(x))f'(x)=1$

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ și notând $f(x)=y$

$\Rightarrow (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ și într-un x_0 fixat

$\Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}}$

E_2) din $f^{-1}(f(x))=x\,|\,(\,)'\Rightarrow$

$(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x)=1\;|\,(\,)'\Rightarrow$

$(f^{-1})''(f(x))\cdot f'(x)f'(x)+(f^{-1})'(f(x))f''(x)=0$

$\Rightarrow (f^{-1})''(y)\cdot(f'(x))^2=-(f^{-1})'(y)f''(x)$

$\Rightarrow (f^{-1})''(y)\cdot(f'(x))^2=-\frac{f''(x)}{f'(x)}\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(f^{-1})''(y_0)=-\frac{f''(x_0)}{(f'(x))^3}}$

E_6) $f'(x)=\frac{1}{x}+1\Rightarrow f'(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+0\Rightarrow f''(e)=-\frac{1}{e^2}$

E_7) $(f^{-1})''(1+e)=-\frac{f''(e)}{(f'(e))^3}=-\frac{-\frac{1}{e^2}}{\frac{1+e}{e}}=$

$=\frac{1}{e^2}\cdot\frac{e}{1+e}=\frac{1}{e(1+e)}$

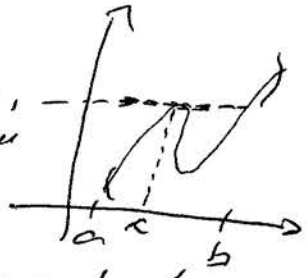
$\Rightarrow (f^{-1})''(1+e)=\frac{1}{e(1+e)}$

(M8) (N2)

TEOREMA LUI FERMAT

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $x_0=c$ un punct de extrem, $c\in(a,b)$.
Dacă f derivabilă în $x_0=c$ atunci $f'(c)=0$

dem intuitivă:
E_1) f reconstentă $\Rightarrow \exists$ c pct de extrem,
E_2) indiferent dacă e pct minim sau maxim $\Rightarrow$ tg la G_f în $x=c$ este $\parallel Ox$
E_3) $m_{tg}=m_{Ox}\Rightarrow f'(c)=0$
Obs: Reciproc NU, dacă $f'(c)=0 \not\Rightarrow x=c$ pct extrem



Exp 1: Dacă $a^x+b^x\geq a+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$, calculați $a^a\cdot b^b$ dacă $a>0$, $b>0$

E_1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x+b^x\Rightarrow$ relația din ip. devine $f(x)\geq f(1)\Rightarrow x=1$ pct de extrem (MINIM)
E_2) Evident $1\in(-\infty;\infty)$ și f derivabilă în $x=1$ $\xrightarrow{T.\ Fermat}$ $f'(1)=0$
E_3) $f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b\Rightarrow f'(1)=a\ln a+b\ln b$
Cum $f'(1)=0\Rightarrow \ln a^a+\ln b^b=0\Rightarrow$
$\ln(a^a b^b)=0\Rightarrow a^a b^b=e^0\Rightarrow \boxed{a^a b^b=1}$

Exp 2: Găsiți $a>0$ dacă $e^x-ax\geq ?$, $\forall x\in\mathbb{R}$

E_1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$, obs. că $f(0)=e^0-0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow$ relația din ip devine $f(x)\geq f(0)$
E_2) Cum $0\in(-\infty,\infty)$ și f deriv în $x=0$
$\Rightarrow f'(0)=0$ (T. Fermat)
E_3) $f'(x)=e^x-a$, $f'(0)=0\Rightarrow 1-a=0$
$\Rightarrow a=1$ cond. necesară, nu suficientă
E_4) Pt $a=1$ sigur $f'(0)=0$ dar s-ar putea ca $x=0$ să nu fie neapărat de extrem, trebuie să verificăm
E_5) $a=1\Rightarrow f(x)=e^x-x$, $f'(x)=e^x-1$,
$f'(x)=0\to e^x=1\Rightarrow x=0$

E_6)

x		0	
f'	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f'(-1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0$; $f'(1)=e-1>0$,
$\to x=1$ pct extrem și $f(1)\geq 1$

Obs.: în probleme, se folosește că dacă α punct de extrem din interiorul D$_f$ în care f e derivabilă atunci $f'(\alpha)=0$, însă trebuie verificat apoi dacă într-adevăr α este punct de extrem, adică dacă $f'(x)$ schimbă semnul în $x=\alpha$
Exp: Găsiți $a=?$ dacă $f(x)=2x^3-ax^2+1$ are pe $x=1$ pct de extrem

E_1) f derivabilă în $x=1\xrightarrow{T.\ Fermat} f'(1)=0$
E_2) $f'(x)=6x^2-2ax$, $f'(1)=0\to 6-2a=0$
$\Rightarrow a=3$ valoare posibilă
E_3) studiem dacă pt $a=3\Rightarrow x=1$ e punct de extrem
$f(x)=2x^3-3x^2+1$
$f'(x)=6x^2-6x$, $f'(x)=0\Rightarrow$
$6x(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{sau} \\ x=1 \end{cases}$

E_4)

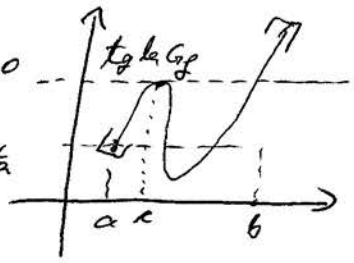
x		0		1	
f'	$+$	0	$-\ -\ -\ -$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\to x=1$ pct de extrem $\Rightarrow$
$a=3$ valoare corectă

TEOREMA LUI ROLLE

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu
a) f cont pe $[a,b]$
b) f derivabilă pe (a,b)
c) $f(a)=f(b)$
atunci $\exists c\in(a,b)$ cu $f'(c)=0$

dem. intuitivă:
E_1) f constantă $\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow \forall c\in(a,b)$ cu $f'(c)=0$
E_2) f nu e constantă, din $f(a)=f(b)\Rightarrow \exists$ cel puțin un punct de extrem notat $c\Rightarrow$ tangenta în $x=c$ este $\parallel$ cu Ox
E_3) $m_{tg}=m_{Ox}\Rightarrow f'(c)=0$



Exp 1: $m,n,p=?$ dacă f verifică ip. T lui Rolle și găsiți c corespunzător pt
$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+p, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_1) f cont pe $[-1,0)$ și pe $(0,1]$, punem condiția ca f cont în $x=0\Leftrightarrow l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p=1=p\Rightarrow p=1\Rightarrow f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+1, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_2) f derivabilă pe $[-1,0)$ și pe $(0,1)$, punem cond ca f derivabilă în $x=0\Leftrightarrow f_s'(0)=f_d'(0)\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{mx^2+nx+1-1}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^x-1}{x-0}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x(mx+n)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^x-1}{x}\Leftrightarrow \boxed{n=1}$
$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} mx^2+x+1, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_3) $f(-1)=f(1)\Leftrightarrow m-1+1=e\Leftrightarrow \boxed{m=e}$
$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ex^2+x+1, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_4) f verifică ip T. lui Rolle $\Leftrightarrow \exists c\in(-1,1)$ cu $f'(c)=0$
Caz I: $c\in[-1,0]\Rightarrow 2ec+1=0\Rightarrow c=-\frac{1}{2e}\in[-1,0)$
Caz II: $c\in(0,1]\Rightarrow e^c=0\Rightarrow \nexists c\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{c=-\frac{1}{2e}}$ e singura valoare

Exp 2: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$
Arătați că ec. $f'(x)=0$ are doar rad. reale

E_1) Als. că $f(-1)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$
E_2) Fie $f_1:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$ și f cont pe $[-1,1]$, f derivabilă pe $(-1,1)$, $f(-1)=f(1)$
T. Rolle $\Rightarrow \exists c_1\in(-1,1)$ cu $f_1'(c_1)=0\Rightarrow f'(c_1)=0$
E_3) Analog pt $f_2:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=f(x)$ și pentru $f_3:[2,3]\to\mathbb{R}$, $f_3(x)=f(x)\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists c_2\in(1,2)$ cu $f'(c_2)=0$ și $\exists c_3\in(2,3)$ cu $f'(c_3)=0\Rightarrow f'$ are cel puțin 3 rădăcini reale
E_4) Deoarece f are gradul IV $\Rightarrow f'$ are gradul III $\Rightarrow f'$ are cel mult 3 rad. reale $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ toate rădăcinile lui f sunt reale

Exp 3: Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ derivabilă, $f(0)=0$, arătați că $\exists u\in(0,1)$ cu $f'(u)=\frac{f(u)}{1-u}$

E_1) Scriem relația din concluzie sub forma $g'(u)=0$ și g trebuie să verifice ip teoremei lui Rolle pe $[0,1]$
E_2) $f'(u)=\frac{f(u)}{1-u}\Leftrightarrow (1-u)f'(u)=f(u)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(u)(1-u)-f(u)=0\Leftrightarrow \big(f(u)(1-u)\big)'=0$
E_3) Fie $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)(1-x)$
f derivabilă $\Rightarrow g$ cont pe $[0,1]$, deriv pe $(0,1)$
și $g(0)=f(0)\cdot1\overset{ip}{=}0$; $g(1)=f(1)\cdot0=0\Rightarrow$
$g(0)=g(1)\overset{Rolle}{\Rightarrow}\exists c\in(0,1)$ a.î. $g'(c)=0$
E_4) $g'(x)=\big(f(x)(1-x)\big)'=f'(x)(1-x)+f(x)\cdot(-1)$
$g'(c)=0\Rightarrow f'(c)(1-c)-f(c)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(c)}{1-c}\Rightarrow f'(u)=\frac{f(u)}{1-u}$

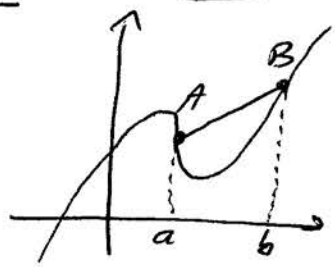
Exp 4: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f,g cont pe $[a,b]$, deriv pe (a,b) și $\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(b)}{g(b)}\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ cu $\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

E_1) $\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Leftrightarrow f(c)g'(c)-f'(c)g(c)=0$, relație ce apare la $\left(\frac{f}{g}\right)'$
$\Rightarrow \frac{f(c)g'(c)-f'(c)g(c)}{g^2(c)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)'=0$
E_2) Fie $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ care verifică ip T lui Rolle $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ cu $h'(c)=0$
E_3) $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ și $h'(c)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c)g(c)-f(c)g'(c)=0\Rightarrow \frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

TEOREMA LUI LAGRANGE (N2)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu
a) f cont pe $[a,b]$
b) f derivabilă pe (a,b)
atunci $\exists c\in(a,b)$ cu
$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

dem intuitivă:



E_1) $A(a,f(a)), B(b,f(b)) \Rightarrow m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

E_2) $\exists c\in(a,b)$ cu proprietatea că tangenta în c la G_f este paralelă cu $AB \Rightarrow m_{tg}=m_{AB} \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Exp 1: $a,b=?$ dacă funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0] \\ ax+b, & x\in(0,1] \end{cases}$ verif. ip T lui Lagrange și determinați punctele c corespunzătoare

E_1) f cont pe $[-1,0)$ și pe $(0,1]$ ca fct elemend, trebuie ca f cont în $x=0 \Leftrightarrow l_s(0)=l_d(0)=f(0)$
$\Leftrightarrow 1=b=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0] \\ ax+1, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_2) f derivabilă pe $[-1,0)$ și pe $(0,1]$, punem cond ca f derivabilă în $x=0 \Leftrightarrow f'_s(0)=f'_d(0)\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \frac{ax+1-1}{x} \Leftrightarrow 1=a$
$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0] \\ x+1, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_3) f verif ip T lui Lagrange $\Rightarrow \exists c\in(-1,1)$ cu $f(1)-f(-1)=f'(c)(1-(-1)) \Rightarrow 2-\frac{1}{e}=2f'(c)$

Cazul I: $c\in[-1,0] \Rightarrow 2-\frac{1}{e}=2e^c \Rightarrow e^c=1-\frac{1}{2e}$
$\Rightarrow c=\ln(1-\frac{1}{2e})\in(-1,0] \Rightarrow$ OK

Cazul II: $c\in(0,1) \Rightarrow 2-\frac{1}{e}=2\cdot 1 \Rightarrow$ KO $\Rightarrow$
$c=\ln(1-\frac{1}{2e})$ singura valoare

Exp 2: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, arătați că $\forall k\in(0,\infty) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < f(k+1)-f(k) < \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

E_1) f cont pe $[k,k+1]$, derivabilă pe $(k,k+1) \Rightarrow$
$\exists c\in(k,k+1)$ cu $f(k+1)-f(k)=f'(c)(k+1-k)$
$\Rightarrow f(k+1)-f(k)=f'(c)$ și $f'(x)=\frac{3}{2}\cdot(x^{\frac{2}{3}})' \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

E_2) $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ și cum $c\in(k,k+1)$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < f(k+1)-f(k) < \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

Exp 3: Rezolvați ec. $3^x+4^x=2^x+5^x$

E_1) Ec. devine: $3^x-2^x=5^x-4^x$

E_2) Fie $f(t)=t^x$, $f:[2,3]\to\mathbb{R} \Rightarrow \exists c_1\in(2,3)$ cu $f(3)-f(2)=f'(c_1)(3-2) \Rightarrow 3^x-2^x=f'(c_1)$

E_3) Fie $f(t)=t^x$, $f:[4,5]\to\mathbb{R} \Rightarrow \exists c_2\in(4,5)$ cu $f(5)-f(4)=f'(c_2)(5-4) \Rightarrow 5^x-4^x=f'(c_2)$

E_4) Ec. devine $f'(c_1)=f'(c_2)$ și cum $f'(t)=xt^{x-1}$
$\Rightarrow$ ec.: $x c_1^{x-1}=x c_2^{x-1}$ și $c_1\neq c_2$ deoarece $c_1\in(2,3)$, $c_2\in(4,5) \Rightarrow x\in\{0,1\}$

Exp 4: Arătați că a_n e convergent unde $a_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n$, $\forall n\geq 1$

E_1) monot.: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n =$
$=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)$

E_2) Fie $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ continuă pe $[n,n+1]$, derivabilă pe $(n,n+1) \Rightarrow \exists c_n\in(n,n+1)$ cu $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)(n+1-n) \Rightarrow \ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{c_n}$

E_3) $n<c_n<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{c_n}<\frac{1}{n} \Rightarrow$
$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)<0$
$\Rightarrow a_{n+1}-a_n<0 \Rightarrow a_n \searrow$ (1)

E_4) mărg.: $a_n \searrow \Rightarrow a_n\leq a_1 \Rightarrow a_n\leq 1$

E_5) trebuie să găsim $a_n\geq\dots$, din ineg $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$ folosim $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$
$n=1 \Rightarrow \ln 2-\ln 1<1$
$n=2 \Rightarrow \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$
$\dots$
$n=n \Rightarrow \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$
"+" $\Rightarrow \ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \mid -\ln n$
$\ln(n+1)-\ln n<a_n$ și cum $\ln(n+1)>\ln n$
$\Rightarrow a_n>0$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow a_n$ mărg

E_6) Din a_n monot și mărg $\Rightarrow$ convergent

RĂDĂCINI MULTIPLE

PENTRU UN POLINOM

1) $x=\alpha$ este rădăcină multiplă de ordin 2 a.î.

$f \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ este polinom} \\ f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)\neq 0 \end{cases}$

adică este de 2 ori rădăcină

2) $x=\alpha$ este rădăcină multiplă de ordin 3 a.î. f

$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ este polinom} \\ f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)=0,\ f'''(\alpha)\neq 0 \end{cases}$

adică este de 3 ori rădăcină

Ex1: $f(x)=e^x-x-1$, studiați ord. de multiplicitate pentru $x=0$

---

f nu e polinom $\Rightarrow x=0$ nu e răd. multiplă, deși e rădăcină pentru că $f(0)=e^0-0-1 \Rightarrow f(0)=0$

Ex2: $f(x)=x^2+2x+1$, ord de multiplicitate pentru $x=-1$

$E_1)\ f(-1)=(-1)^2+2(-1)+1=1-2+1=0$

$E_2)\ f'(x)=2x+2,\ f'(-1)=-2+2=0$

$E_3)\ f''(x)=2,\ f''(-1)=2\neq 0$

$\Rightarrow x=-1$ este răd multiplă de ordin 2

ȘIRUL LUI ROLLE

(N1)

- ne dă numărul de rădăcini reale ale unei ec. și intervalele în care sunt situate aceste rădăcini

E_1) se aduce ec la forma $f(x)=0$, se găsește D_f

E_2) se calc. $f'(x)$, se rezolvă $f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots$ rădăcini

E_3) se face tabelul de forma

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	∞
f'		0	0	0	
f					

unde linia lui f se completează cu limite la capetele D_f și valorile lui $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...

E_4) șirul lui Rolle este șirul semnelor din linia lui f (adică semnele de la limite la capete și semnele pt $f(x_1), f(x_2)\ldots$)

E_5) Dacă apar semne consecutive identice, atunci pe intervalul corespunzător lui $x \Rightarrow f$ nu are rădăcini

Dacă apar semne consecutive diferite, atunci pe intervalul corespunzător lui $x \Rightarrow f$ are o singură rădăcină reală

Dacă apare $0 \Rightarrow x_i$ pt care $f(x_i)=0$ este rădăcină. Dacă f este polinom, atunci x_i este rād. multiplă și pt. a-i găsi ordinul calculăm $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $f''(x_i)$, ... Dacă f nu e polinom atunci rădăcina x_i de mai sus nu e multiplă

Exemplu 1: Găsiți nr. rād. reale pentru $x^3-6x^2+9x-10=0$

E_1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$

E_2) $f'(x)=3x^2-12x+9$,

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \,|:3 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \end{cases}$

E_3)

x	$-\infty$		1		3	∞
f'			0		0	
f	$-\infty$		-6		-10	∞

$f(1)=1-6+9-10=-6$; $f(3)=27-54+27-10=-10$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E_4) șirul Rolle: $(-;-;-;+)$

$\Rightarrow$ o rād reală $x_1\in(3;\infty)$

Exemplu 2: Găsiți nr. rād reale pt $4x^5-25x^4+60x^3-70x^2+40x+1=0$

E_1) $f'(x)=20x^4-100x^3+180x^2-140x+40$

$f'(x)=0 \Rightarrow 20(x^4-5x^3+9x^2-7x+2)=0$

$\Rightarrow x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$

E_2) Cu Horner $\Rightarrow x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=2$

E_3)

x	$-\infty$		1		2	∞
f'			0		0	
f	∞		0		-423	∞

$f(1)=4-25+60-70+40+1=105-105=0$

$f(2)=4\cdot32-25\cdot16+60\cdot8-70\cdot4+40\cdot2+1=-423$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E_6) șirul lui Rolle: $(-;0;-;+)$

$\Rightarrow x_1=1$ rād multiplă, $x_2\in(2;\infty)$

E_7) Pt a-i vedea ordinul,

$f'(x)=20(x^4-5x^3+9x^2-7x+2) \Rightarrow f'(1)=0$

$f''(x)=20(4x^3-15x^2+18x-7) \Rightarrow f''(1)=0$

$f'''(x)=20(12x^2-30x+18) \Rightarrow f'''(1)=0$

$f^{IV}(x)=20(24x-30) \Rightarrow f^{IV}(1)=-120\neq0$

$\Rightarrow x=1$ rād de ordin 4

Exemplu 3: $\ln x - x = 0$, nr. rād

E_1) cond $x>0 \Rightarrow f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x - x$

E_2) $f'(x)=\frac{1}{x}-1$, $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1\in D_f$

E_3)

x	//	0		1	
f'	//			0	
f	//	$-\infty$		-1	$-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (\ln x - x) = -\infty$; $f(1)=\ln1-1=-1$;

$\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x - x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right) = -\infty$ ($\frac{\ln x}{x}\to0$)

E_4) Șirul Rolle: $(-;-;-) \Rightarrow$ 0 rād. reale

DISCUȚIA NUMĂRULUI DE RĂDĂCINI REALE FOLOSIND ȘIRUL LUI ROLLE

E_1) se aduce ec. la forma $f(x)=0$ unde în expresia lui $f(x)$ apare m ca termen liber (independent de x)

E_2) calculăm $f'(x)$ în care nu trebuie să apară m, rezolvăm $f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots$ rădăcini

E_3) calculăm limitele la capetele lui f și $f(x_1), f(x_2), \dots$ și facem tabelul de la Rolle

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		∞
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$\lim_{x\to-\infty}$		$f(x_1)$		$f(x_2)$		$f(x_3)$		$\lim_{x\to\infty}$

E_4) facem tabel și toate expresiile ce conțin pe m de pe linia lui f

E_5) discutăm pe cazuri numărul de rădăcini (sau facem tabel de discuție pt nr. de rădăcini, dar elevii normali se încurcă la tabel)

Tabelul ar avea forma

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞	DISCUȚIE
$f(x)$	semne corespunzător							///////
$m\in(-\infty;x_1)$	semne corespunz.							nr. de rad și situare
$m=x_1$	semne corresp.							nr. de rad și situare
...	...							...

Obs: se precizează rād dublă, triplă, doar dacă f polinom și doar atunci verificăm ordinul de multiplicitate

---

Exp 1): Discutați nr. de rād $2x^3+3x^2=m$

E_1) $2x^3+3x^2-m=0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2-m$

E_2) $f'(x)=6x^2+6x$, $f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{sau} \\ x=-1 \end{cases}$

E_3)

x	$-\infty$		-1		0		∞
f'			0		0		
f	$-\infty$		$1-m$		$-m$		∞

Șirul lui Rolle: $(-;\ \operatorname{sgn}(1-m);\ \operatorname{sgn}(-m);\ +)$

E_4)

m					0		1		
$1-m$	+	+	+	+	+	0	−	−	−
$-m$	+	+	+	+	0	−	−	−	−

E_5)

x	$-\infty$		-1		0		∞	DISCUȚIE
$f(x)$	$-\infty$		$1-m$		$-m$		∞	///////
$m\in(-\infty;0)$	−	+	+	+				$x_1\in(-\infty;-1)$
$m=0$	−	+	0	+				$x_1\in(-\infty;-1)$, $x_2=0$
$m\in(0;1)$	−	+	−	+				$x_1\in(-\infty;-1)$, $x_2\in(-1;0)$, $x_3\in(0;\infty)$
$m=1$	−	0	−	+				$x_1=-1$, $x_2\in(0;\infty)$
$m\in(1;\infty)$	−	−	−	+				$x_1\in(0;\infty)$

Obs: Pt $m=0 \Rightarrow f(x)=2x^3+3x^2$, $f'(x)=6x^2+6x$

$\Rightarrow f'(0)=0$, $f''(x)=12x+6 \Rightarrow f''(0)\neq 0 \Rightarrow x=0$ rād de ord II

... de ord II ... x^2-1. $f'(x)=6x^2+6x$

Exp 2: $x^3+3x^2-mx+5=0$, m. rădăc. reale

E_1) $x_1=0$ nu e rād, $x^3+3x^2-mx+5=0 \mid :x\neq 0 \Rightarrow$

$x^2+3x-m+\frac{5}{x}=0$

E_2) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-m+\frac{5}{x}$

$f'(x)=2x+3-\frac{5}{x^2}=\frac{2x^3+3x^2-5}{x^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow$ Horner

$\Rightarrow (x-1)(2x^2+5x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \Delta<0 \end{cases}$

E_3)

x	$-\infty$		0		1		∞
f'			‖		0		
f	∞		$-\infty$ ‖ ∞		$9-m$		∞

Șirul Rolle: $(+;\ -\ \|\ +;\ \operatorname{sgn}(9-m);\ +)$

E_4)

m					9		
$9-m$	+	+	+	+	0	−	−	−	−

E_5)

x	$-\infty$		0		1		∞	DISCUȚIE
$f(x)$	∞	$-\infty$	‖	∞	$9-m$		∞	///////
$m\in(-\infty;9)$	+	−	‖	+	+		+	$x_1\in(-\infty;0)$
$m=9$	+	−	‖	+	0		+	$x_1\in(-\infty;0)$, $x_2=1$
$m\in(9;\infty)$	+	−	‖	+	−		+	$x_1\in(-\infty;0)$, $x_2\in(0;1)$, $x_3\in(1;\infty)$

Obs: unde e ‖ nu se consideră schimbare de semn

Obs 2: deoarece ec. inițială provenea din polinom $\Rightarrow$ pt $m=9$ avem $x_2=1$ poate fi multiplă și

$f(x)=x^3+3x^2-9x+5$, $f(1)=0$

$f'(x)=3x^2+6x-9$, $f'(1)=0$

$f''(x)=6x+6$, $f''(1)\neq 0 \Rightarrow x=1$ rād multiplă de ord II.

REGULILE LUI L'HOPITAL (N1)

Dacă se cere $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ și suntem în unul din cazurile $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ sau $\boxed{\frac{0}{0}}$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ și se poate aplica recursiv în caz de nevoie.

Obs.: Dacă la un moment dat, după aplicarea lui l'H limita nu există, înseamnă că nu pot folosi l'H și că trebuie altă metodă

Obs 2: Dacă $x_n=\frac{f(n)}{g(n)}$ și se cere $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$, chiar dacă suntem în unul din cazurile $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, nu putem aplica l'H ci trebuie să considerăm funcție ajutătoare cu domeniul $(0;\infty)$

Exp 1: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{5x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(5x)'}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{5}\overset{\frac{1}{\infty}}{=}0$

Exp 2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}\overset{\frac{\infty+[-1,1]}{\infty-[-1,1]}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$ care nu există

$\Rightarrow$ nu pot folosi l'H $\Rightarrow$ caut o altă metodă

$l\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}\overset{\frac{1+0}{1-0}}{=}1$

deoarece $\sin x\in[-1,1]\Rightarrow\frac{\sin x}{x}\to 0$,

și $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}\overset{\frac{[-1,1]}{\infty}}{=}0$

Exp 3: $x_n=\frac{n^3}{\ln n+4}$, $\lim_n x_n=?$

E1) $\lim_n\frac{n^3}{\ln n+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

E2) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{\ln x+4}$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\ln x+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}3x^3=\infty$

E3) $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\ln n+4}=\infty$

REPREZENTAREA GRAFICĂ

N3

I) Domeniul de definiție: - se pun condiții la numitori, radicali de ordin par, logaritmi și arcsin, arccos

II) Intersecția cu axele, limite la capete, asimptote

E_1) intersecția cu axele
$\cap Oy$: $x=0$ (dacă $0 \in D_f$), $f(0)=\ldots \Rightarrow A(0, f(0)) \in G_f$
$\cap Ox$: $y=0 \Rightarrow f(x)=0$ și alegem doar soluțiile din $D_f \Rightarrow B(x_1,0)$, $C(x_2,0)$ etc

E_2) calculăm limitele la toate capetele deschise ale D_f și valori în capete închise

E_3) calc. asimptotele folosind limitele din E_2)

III) Continuitate, derivabilitate

E_1) se afirmă f continuă pe orice interval pe care nu-și schimbă forma ca și operații cu funcții elementare, se studiază dacă f cont. în pct unde sch. forma, se precizează eventuale pct de discont (spețe I sau spețe II)

E_2) se calculează $f'(x)$, se rezolvă $f'(x)=0$, se găsește semnul lui $f'(x)$, se precizează monotonia și eventualele pct critice, de extrem, anghiulare sau de întoarcere

E_3) se calculează $f''(x)$, se rezolvă $f''(x)=0$, se găsește semnul lui $f''(x)$, se deduce dacă f convexă sau concavă și pct inflexiune

Obs: dacă $f''(x)$ e complicat, uneori el lipsește

IV) Tabel de variație:

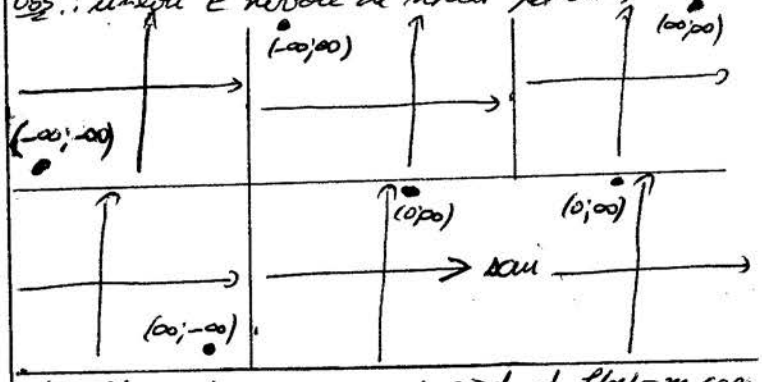
x				
f''				
f'				
f				

unde pe linia lui x se trec toate valorile găsite pt x (din D_f, din $\cap$ cu axele, din condiții, din f', f''), pe linia lui f'' se trec zerouri, bară, semn, pe linia lui f' zerouri, bară sau semn iar pe linia lui f valori în loc de x-și de pe prima linie precizând eventual că e pct critic, minim, maxim, inflexiune etc precum și săgeți de monotonie și curbe de convexitate

V) Trasarea graficului

E_1) se hașurează porțiunea care $\notin D_f$
E_2) trasăm asimptotele în direcția respectivă
E_3) reprezentăm toate punctele obținute
E_4) unim aceste puncte ținând cont că G_f se apropie de asimptote în direcția respectivă

Obs.: uneori e nevoie de situat pct de tipul



Obs.: Uneori se cere nr. de rad pt $f(x)=m$ care este dat de nr. de pct de $\cap$ dintre $y=m$ și G_f

Exp 1.: $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$, se cere G_f și nr. de rad pt $f(x)=m$

E_1) Cond.: $\frac{x-1}{x} \geq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$\|$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	0	$+$	$+$

$\Rightarrow D_f = (-\infty;0) \cup [1;\infty)$

E_2) $\cap Oy$: $x=0 \notin D_f \Rightarrow G_f \cap Oy$
$\cap Ox$: $y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x=1 \in D_f \Rightarrow A(1;0) \in G_f$

E_3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \quad \frac{-1}{0^-} \quad \infty$; $f(1)=0$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

E_4) as. oriz; din $E_3) \Rightarrow y=1$ as. oriz la $\pm\infty$
as. oblice: deoarece $\exists$ as. oriz la $\pm\infty \Rightarrow \nexists$ oblice
as. verticală: din $E_3) \Rightarrow x=0$ as. vert la stg

E_5) f cont pe $(-\infty;0) \cup [1;\infty)$ ca și fct elementară ($\sqrt{\frac{x}{\cdot}}$, $\frac{1}{\cdot}$)

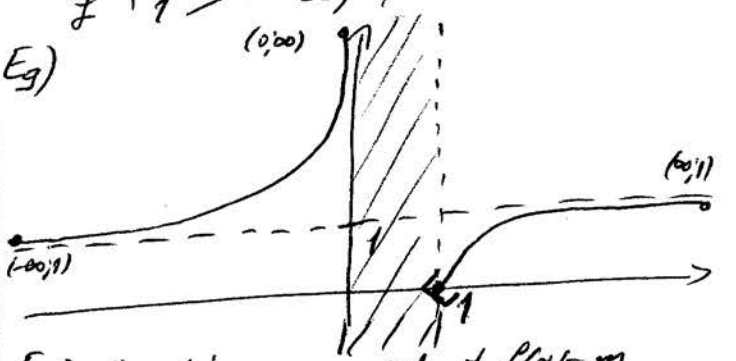
$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \notin D_f$ și evident $f'(x)>0, \forall x \in D_f$

E_7) $f''(x)$ e prea complicată, nu o calculăm

E_8)

x	$-\infty$				0				∞
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$	$+$
f	1	$\nearrow$	∞	$)($	$\|\|$	0	$\nearrow$	1	

E_9)



E_{10}) discută nr. de rad pt $f(x)=m$

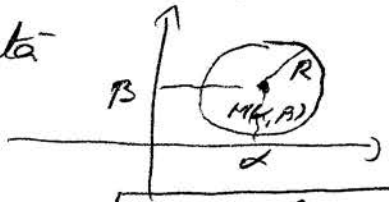
$m \in (-\infty;0) \Rightarrow \nexists$ rad
$m=0 \Rightarrow x_1=1$ rad
$m \in (0;1) \Rightarrow x_1 \in (1;\infty)$
$m=1 \Rightarrow \exists$ rad $x_1 \in (-\infty;0)$

REPREZENTAREA GRAFICĂ A CONICELOR

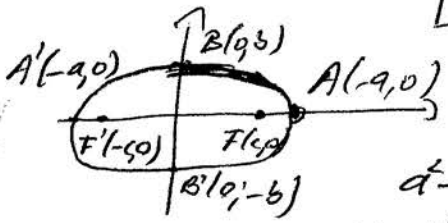
1) **CERCUL** de centru $M(\alpha,\beta)$ și rază R are ec.: $\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$

Obs 1: $A_{cerc}=\pi R^2$ și $L_{cerc}=2\pi R$

Obs 2: se reprezintă



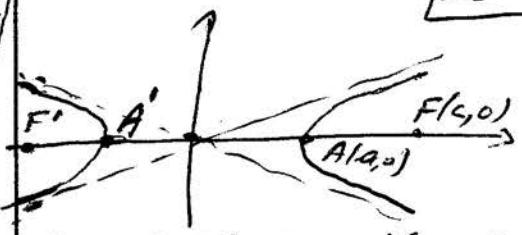
2) **ELIPSA** are ec. $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$



Focarele $F(c,0)$ și $F'(-c,0)$ cu $a^2-c^2=b^2$

excentricitatea $e=\frac{c}{a}<1$

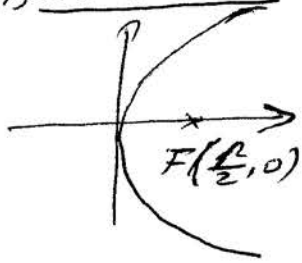
3) **HIPERBOLA** are ec.: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$



Focarele $F(c,0)$ și $F'(-c,0)$ cu $c^2-a^2=b^2$

excentricitatea $e=\frac{c}{a}>1$

4) **PARABOLA** are ec.: $y^2=2px$, $p>0$



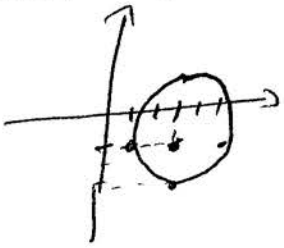
Focarul $F(\frac{p}{2},0)$

p parametrul parabolei

Exp.: Reprezentați grafic cercul $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

E_1) cercul are centrul în $M(3,-1)$ și $R=2$

E_2)



Exp 2: Reprezentați grafic cercul $x^2+2x+y^2+y=\frac{31}{4}$

E_1) ec se poate scrie

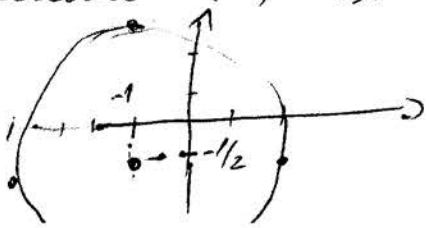
$(x+1)^2-1+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=\frac{31}{4}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{31}{4}+\frac{5}{4}$

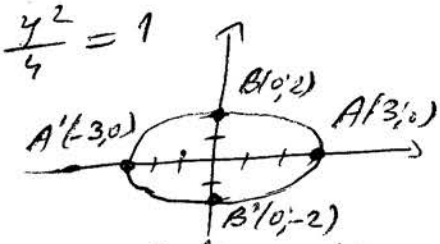
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=9$

$\Rightarrow$ centrul $M(-1,-\frac{1}{2})$, $R=3$

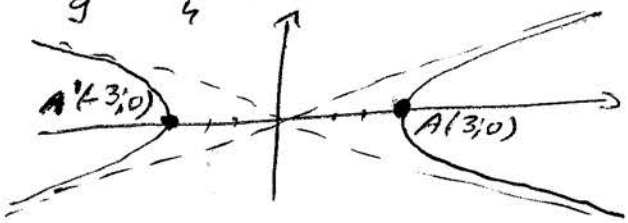
E_2)



Exp 3: reprezentați grafic $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$



Exp 4: reprezentați grafic $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$



Exp 5: reprezentați grafic $y^2=8x$

focarul $F(\frac{p}{2},0)$ și $2p=8\Rightarrow p=4$

$\Rightarrow F(\frac{4}{2},0)\Rightarrow F(2,0)$

