Data:

CLASA A XI-A

SETUL 3
ANALIZĂ XI, partea 2

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar 2017-2018

LIMITE DE FUNCȚII

METODA FACTORULUI FORȚAT, RAȚIONALIZAREA

FACTOR FORȚAT PENTRU RADICALI

LIMITE CU NUMITOR CE TINDE LA 0

LIMITE REMARCABILE

ASIMPTOTE

FUNCȚII CONTINUE

FUNCȚII CU PROPRIETATEA LUI DARBOUX

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

LIMITA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

1) Se dă $f: D_f \to \mathbb{R}$ o funcție, se cere $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = ?$ unde α este punct din domeniu sau α este capăt deschis al domeniului, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

2) se folosesc ideile de la limite de șiruri:

a) înlocuire directă

b) metode de rezolvare: factor forțat, desc. factori, rationalizare

c) limite remarcabile

3) f are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x = \alpha$

$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Obs 1: f are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x = \alpha$

$\Leftrightarrow \forall x_n \to \alpha$ avem $\lim\limits_{x_n \to \alpha} f(x_n) = l$

Obs 2: f nu are limită în $x = \alpha$

$\Leftrightarrow \exists x_n \to \alpha, x'_n \to \alpha$ cu $\lim\limits_{x_n \to \alpha} f(x_n) = l_1$, $\lim\limits_{x'_n \to \alpha} f(x'_n) = l_2$ și $l_1 \neq l_2$

Obs 3: f nu are limită în $x = \alpha$

$\Leftrightarrow \exists u(x) \to \alpha$, $u'(x) \to \alpha$ cu $\lim\limits_{u(x) \to \alpha} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{u'(x) \to \alpha} f(x) = l_2$ și $l_1 \neq l_2$ unde $u(x)$ și $u'(x)$ sunt variante de $x \to \alpha$

Exp 1: $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^3 + x^2 + 1) \overset{\infty + \infty + 1}{=\!=} \infty$

Exp 2: $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 + x^2 + 1) \overset{2+1+1}{=\!=} 4$

Exp 3: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + x + 1}{4x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(4 + \frac{3}{x}\right)}$

$\overset{-\infty(2+0+0)/4+0}{=\!=} -\infty$

Exp 4: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x-1} \overset{3/0(!)}{=\!=}$

$l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x+2}{x-1} \overset{3/0-}{=\!=} -\infty$

$l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x+2}{x-1} \overset{3/0+}{=\!=} \infty$

$\Rightarrow \exists u(x) \to 1, u(x) < 1$ cu $u'(x) \to 1, u'(x) > 1$

$\lim\limits_{u(x) \to 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{u'(x) \to 1} f(x) = \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Obs 4: Pt cei deștepți, definiția cu $\forall x_n \to \alpha, x_n \neq \alpha \Rightarrow \exists \lim\limits_{x_n \to \alpha} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Exp: $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ \frac{4}{x}, & x \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \forall x_n \to 1, x_n \neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{x_n \to} f(x_n) = \lim\limits_{x_n \to 1} \dfrac{4}{x_n} = 1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

(N2) (N2)

COM ARĂTĂM CĂ FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE NU AU LIMITĂ LA ∞

Alegem 2 șiruri $x_n \to \infty$ și $x'_n \to \infty$ a.î. funcția calculată în acele șiruri să aibă limite diferite

Exp: $\nexists \lim_{x\to\infty} \sin x$

$E_1)$ $x_n = 2n\pi \to \infty \Rightarrow \sin x_n = \sin(2n\pi) = \sin 0 \to 0$

$x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty \Rightarrow \sin x'_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} \to 1$

$E_2)$ $\left.\begin{array}{l} x_n \to \infty,\ f(x_n) \to 0 \\ x'_n \to \infty,\ f(x'_n) \to 1 \end{array}\right\} \to \nexists \lim_{x\to\infty} \sin x$

Exp: Să se arate că $\nexists \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

$E_1)$ $x_n = \frac{1}{2n\pi} \Rightarrow \cos\frac{1}{x_n} = \cos(2n\pi) = \cos 0 = 1 \to 1$

$x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \Rightarrow \cos\frac{1}{x'_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \to 0$

$E_2)$ $\left.\begin{array}{l} x_n \to 0,\ f(x_n) \to 1 \\ x'_n \to 0,\ f(x'_n) \to 0 \end{array}\right\} \to \nexists \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

LIMITA UNEI FUNCȚII DATE PRIN ACOLADE

TIP I: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x<\alpha \\ f_2(x), & x\geq\alpha \end{cases}$

E_1) f are limită pe $(-\infty,\alpha)$ și pe (α,∞) ca și fct. elementară

E_2) studiem dacă f are limită în $x=\alpha$

$$l_s(\alpha)=\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f_1(x)$$

$$l_d(\alpha)=\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f_2(x)$$

E_3) dacă $l_s(\alpha)=l_d(\alpha)\Rightarrow f$ are limită în $x=\alpha$

dacă $l_s(\alpha)\neq l_d(\alpha)$ sau dacă $\nexists$ vreuna din limite $\Rightarrow f$ nu are limită în $x=\alpha$

TIP II: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\mathbb{Q} \\ f_2(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Se cere studiera dacă f are limită în $x=\alpha$

E_1) calculăm $l_1(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x_n\to\alpha \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f_1(x)$

$$l_2(\alpha)=\lim_{\substack{x_n\to\alpha \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f_2(x)$$

E_2) Dacă $l_1(\alpha)=l_2(\alpha)\Rightarrow f$ are limită în $x=\alpha$

Dacă $l_1(\alpha)\neq l_2(\alpha)$ sau dacă $\nexists$ vreuna din ele $\Rightarrow f$ nu are limită în $x=\alpha$

Exemplu: $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x<2 \\ x+5, & x>2 \end{cases}$

Studiați dacă f are limită în $x=2$

E_1) $l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x<2}}(3x+1)=7$

$l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x>2}}(x+5)=7$

E_2) $l_s(2)=l_d(2)\Rightarrow f$ are limită în $x=2$

Exemplu 2: $f(x)=\begin{cases} 7x-1, & x\in\mathbb{Q} \\ x+3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Studiați dacă f are limită în $x=5$

$l_1(5)=\lim\limits_{\substack{x_n\to5 \\ x_n\in\mathbb{Q}}}(7x_n-1)=34$

$l_2(5)=\lim\limits_{\substack{x_n\to5 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}(x_n+3)=8$

$l_1\neq l_2\Rightarrow f$ nu are limită în $x=5$

OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII. CAZURI EXCEPTATE

1) atunci când $x \to a$, unele limite se pot calcula direct prin înlocuirea lui x cu a (asemănător limitelor de la șiruri).

2) dacă acest lucru nu e posibil obținem cazuri exceptate (nedeterminări), adică limite care, pentru a putea fi calculate, trebuie prelucrată expresia funcției

3) Cazurile exceptate sunt:

1) $\infty - \infty$ ← rationalizare, factor forțat

2) $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ ← factor forțat, limite remarcabile

3) $\infty \cdot 0$ sau $0 \cdot \infty$ ← limite remarcabile, folosim $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$

4) 1^{∞} cu $\lim\limits_{x_n \to 0} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$

5) $\infty^0; 0^0; 0^{\infty}$ se folosește $f^g = e^{g \cdot \ln f}$

Exp 1: $\lim\limits_{x \to 3} (2x-5) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

Exp 2: $\lim\limits_{x \to \infty} (2x-5) \overset{2 \cdot \infty - 5}{=\!=} \infty$

Exp 3: $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x + 3) \overset{\infty - \infty + 3}{=\!=}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \overset{\infty(1-0+0)}{=\!=} \infty$

Exp 4: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^5 - 1}{x^2 + x} \overset{\frac{-\infty - 1}{\infty - \infty}}{=\!=}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{1}{x^5}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \overset{\frac{-\infty \cdot 3}{1}}{=\!=} -\infty$

Exp 5: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \overset{\frac{2}{5}}{=\!=} \frac{2}{5}$

Exp 6: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} \overset{\frac{1}{\infty \cdot 1}}{=\!=} 0$

Exp 7: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$

desc. factori, $x^2 - 3x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 1(x-1)(x-2)$ și

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$\Rightarrow l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)} \overset{\frac{-1}{3}}{=\!=} -\frac{1}{3}$

Exp 8: $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\ln(2x+1) - \ln(x+2)\right] =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \ln \frac{2x+1}{x+2} = \ln\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x+2}\right) =$

$= \ln\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}\right) = \ln 2$

LIMITE REMARCABILE DE FUNCȚII

$$\lim_{u(x)\to\pm\infty} P(x) = \lim_{u(x)\to\pm\infty} (\text{term de grad maxim})$$

1) $$\lim_{u(x)\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{grad } P < \text{grad } Q \\ \text{raportul coef de grad maxim}, & \text{grad } P = \text{grad } Q \\ \lim\limits_{u(x)\to\pm\infty} \left(\text{raportul termenilor de grad maxim}\right) = \infty, & \text{grad } P > \text{grad } Q \end{cases}$$

2) $$\lim_{u(x)\to\infty} 2^{u(x)} = \begin{cases} \nexists, & 2 < -1 \\ \nexists, & 2 = -1 \\ 0, & 2 \in (-1;1) \\ 1, & 2 = 1 \\ \infty, & 2 > 1 \end{cases}$$

3) $$\lim_{u(x)\to\infty} \frac{P(u(x))}{a^{u(x)}} = \begin{cases} \infty \cdot \lim\limits_{u(x)\to\infty} P(x), & a \in (0;1) \\ 0, & a \in (1;\infty) \end{cases}$$

4) $$\lim_{u(x)\to\infty} \frac{\ln(u(x))}{u(x)} = 0$$

5) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a$$

6) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$$

7) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{(1+u(x))^{r} - 1}{u(x)} = r$$

8) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{tg}(u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\arcsin(u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(u(x))}{u(x)} = 1$$

Obs.: nu sunt limite remarcabile

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\cos(u(x))}{u(x)}, \text{ nici } \lim_{u(x)\to 0} \frac{\arccos(u(x))}{u(x)},$$

$$\text{nici } \lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{ctg}(u(x))}{u(x)}, \text{ nici } \lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{arcctg}(u(x))}{u(x)}$$

9) $$\lim_{u(x)\to 0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$$

LIMITE REMARCABILE DE FUNCȚII. (N2)

EXEMPLE

Exp 1: $\lim_{x\to-\infty}(5x^2-7x^3+x+2)=$

$=\lim_{x\to-\infty}(-7x^3)=\infty$

Exp 2: $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^7+2x-1}{3x^2+x+2}=$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^7}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{3}x^5=-\infty$

Exp 3: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{2x^2+3}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{2x^2+3}\overset{0\cdot\frac{1}{2}}{=\!=}0,$

s-a folosit $\lim_{u(x)\to\infty}\frac{\ln|u(x)|}{u(x)}=0$

pt $u(x)=x^2+1\to\infty$ și

$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\overset{grP=grQ}{=\!=}$ raportul coef de gr maxim

Exp 4: $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(5x)}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(5x)}{5x}\cdot\frac{5x}{3x}$

$=1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$, s-a folosit

$\lim_{u(x)\to0}\frac{\operatorname{tg}|u(x)|}{u(x)}=1$ pt $u(x)=5x\to0$

Exp 5: $\lim_{x\to\infty}2^x\sin\left(\frac{2}{3}\right)^x\overset{\infty\cdot0}{=\!=}$

$=\lim 2^x\cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left|\frac{2}{3}\right|^x}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1}=$

$1\to\infty$!

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x\overset{1\cdot\infty}{=\!=}\infty$

s-a folosit

$\lim_{u(x)\to0}\frac{\sin|u(x)|}{u(x)}=1$ pt $u(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\to0$

și $\lim_{x\to\infty}2^x=\infty$ pt $2=\frac{4}{3}>1$

Exp 6: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\ln(1+\sin 3x)}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{3x}{\ln(1+\sin 3x)}\cdot\frac{1}{3x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{3x}{\ln(1+\sin 3x)}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{3x}=$

$\overset{1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}}{=\!=}\frac{1}{3}$, s-a folosit

$\lim_{u(x)\to0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$ pt

$u(x)=\sin x\to0$

și pt $u(x)=3x\to0$

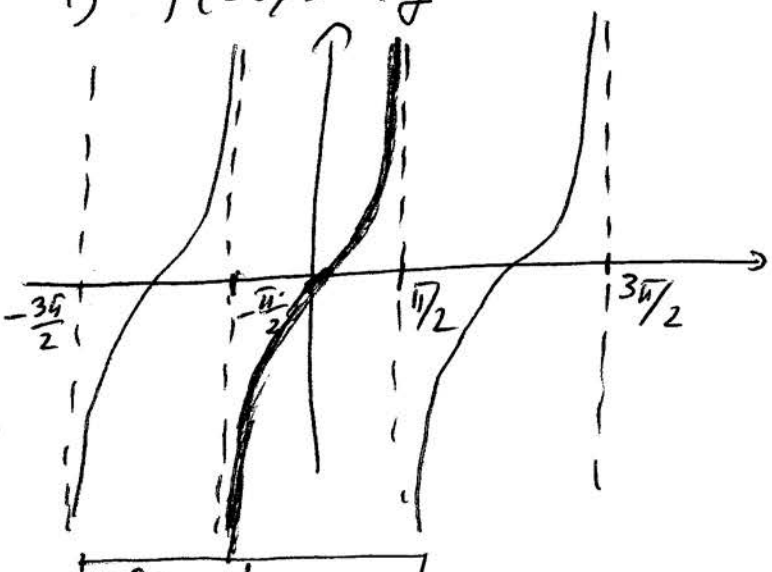
și $\lim_{u(x)\to0}\frac{\sin|u(x)|}{u(x)}=1$

pt $u(x)=x\to0$

LIMITE TRIGONOMETRICE

DEDUSE DIN GRAFIC

1) $f(x) = tg\, x$



$\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} tg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x > \pi/2}} tg\, x = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3\pi}{2} \\ x < \frac{3\pi}{2}}} tg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} tg\, x = -\infty$

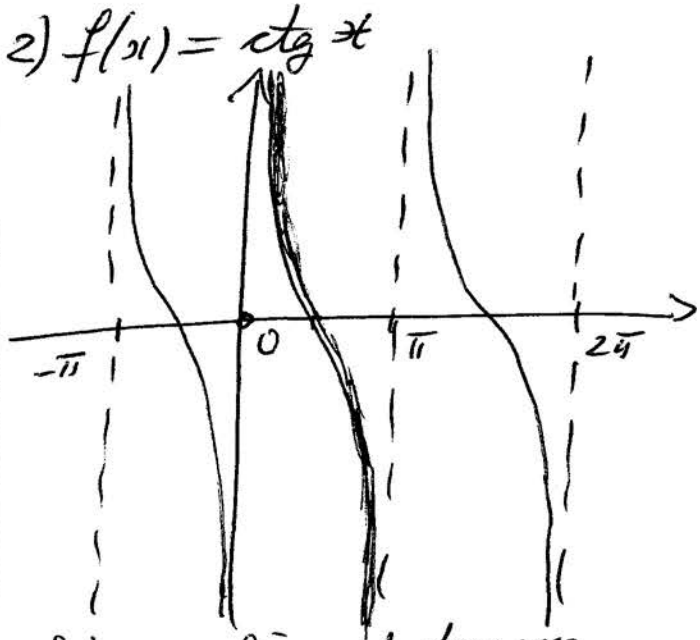
etc

Obs.: deoarece $arctg\, x$ este inversa fct bijective $tg\, x$ doar pe $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to \infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$ si

$\lim\limits_{x \to -\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2}$

2) $f(x) = ctg\, x$



Din grafic, deducem

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} ctg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} ctg\, x = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} ctg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ x > -\pi}} ctg\, x = \infty$

etc

Obs.: deoarece $arcctg\, x$ este inversa fct. bijective $ctg\, x$ doar pe $(0; \pi) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to \infty} arcctg\, x = 0$ si

$\lim\limits_{x \to -\infty} arcctg\, x = \pi$

LIMITE LOGARITMICE ȘI LIMITE EXPONENȚIALE

$$\lim_{x\to\infty} \log_b x \overset{b\in(1;\infty)}{=\!=} \infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_b x \overset{b\in(1;\infty)}{=\!=} -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_b x \overset{b\in(0;1)}{=\!=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_b x \overset{b\in(0;1)}{=\!=} \infty$$

Obs.: aceste limite se deduc din definiția logaritmului și prin considerarea cenii și prin considerarea cenii exemplu de bază în fiecare caz, de exp $b=2$ pt $(1;\infty)$ și $b=\frac{1}{2}$ pt $(0;1)$

Obs.: deoarece $e=2{,}71\ldots$ $\Rightarrow e\in(1;\infty)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \text{ și } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \begin{cases} \nexists, & 2<-1 \\ \nexists, & 2=-1 \\ 0, & 2\in(-1;1) \\ 1, & 2=1 \\ \infty, & 2>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = \begin{cases} 0, & 2<-1 \\ \nexists, & 2=-1 \\ \nexists, & 2\in(-1;0) \\ 0, & 2=0 \\ \infty, & 2\in(0;1) \\ 1, & 2=1 \\ 0, & 2>1 \end{cases}$$

Obs.: această limită e greu de memorat, considerăm câte un exemplu pt 2 în fiecare caz

Exp 1: $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2)^x = (-2)^{-\infty} = \frac{1}{(-2)^{\infty}} \overset{\frac{1}{\pm\infty}}{=\!=} 0$

Exp 2: $\lim\limits_{x\to-\infty} (-1)^x = (-1)^{-\infty} = \frac{1}{(-1)^{\infty}} < {}_{1}\nexists^{-1}$

Exp 3: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^x = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{\infty} < \nexists^{-\infty}$

METODA FACTORULUI FORȚAT LA RADICALI DE ORDIN PAR CÂND $x \to -\infty$

- dacă $x \to -\infty$ și se dă factor forțat la radicali de ordin par, în fața radicalului iese cu modul și apoi studiem semnul candidatei din modul

- dacă $x \to \infty$ sau $x \to -\infty$ dar avem radicali de ordin impar, atunci nu mai apare modulul

---

Exp 1: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} \overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Exp 2: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}}{2x+1} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})}$

$= \dfrac{1}{2}$

Exp 3: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+x}}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x^2|\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x^2(3+\frac{1}{x^2})} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x^2(3+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1}{3}$

Exp 4: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+x^3}}{5x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x(5+\frac{1}{x})} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x(5+\frac{1}{x})} = -\dfrac{1}{5}$

Exp 5: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})} =$

$= 1$

Exp 6: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})} =$

$= \dfrac{1}{2}$

(M2) METODA NOTAȚIEI LA CALCULUL LIMITELOR

- deoarece majoritatea limitelor sunt date pentru $x \to 0$ sau pentru $x \to \infty$, dacă nu avem așa ceva și dacă nu putem calcula direct, atunci notăm.

- orice limită care se rezolvă cu notație poate fi rezolvată și direct, însă ne putem înșela de aceea e preferabil să notăm

---

Exp 1: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=t}{\underset{x=\frac{1}{t}}{=}} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2^t-1}{t} =$

$= \ln 2$

mod II: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \ln 2$ pt că

dacă $x \to \infty$ atunci $\frac{1}{x} \to 0$ și folosim

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2^t-1}{t} = \ln 2$

Exp 2: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-27}{x-3} \overset{x=t+3}{=}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3^{t+3}-27}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3^3(3^t-1)}{t} =$

$= 27 \cdot \ln 3$

mod II: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-27}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{27(3^{x-3}-1)}{x-3} =$

$= 27 \cdot \ln 3$

Exp 3: $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{8}} \overset{x-64=t}{\underset{x=t+64}{=}}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+64}-8}{\sqrt[4]{t+64}-\sqrt{8}}$ amplificăm conjugații

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(\sqrt{t+64}-8)(\sqrt{t+64}+8)}{\sqrt{t+64}+8} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8}}{(\sqrt[4]{t+64}-\sqrt{8})(\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8})} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t+64-64}{\sqrt{t+64}+8} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8}}{\sqrt{t+64}-8} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8})}{t+64-64} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8})}{t} =$

$= \sqrt{8}+\sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

mod II: dacă eram deștepți,

$\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{(\sqrt{x}-8)}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt{8})} \dfrac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{8})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{8})} = \lim\limits_{x\to 64} \dfrac{(\sqrt{x}-8)(\sqrt[4]{x}+\sqrt{8})}{\sqrt{x}-8}$

$= \sqrt{8}+\sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

CALCULAREA LIMITEI DIN FUNCȚIA INVERSĂ

Se cere $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f^{-1}(x)}{g(x)}$ unde $f:(a,b)\to(c,d)$

E_1) se arată că f injectivă (cu derivata) și că f e surjectivă (cu f continuă și limite la capete) $\Rightarrow f$ bijectivă

E_2) notăm $f^{-1}(x)=t \Leftrightarrow x=f(t)$

E_3) din $x\to\alpha \Rightarrow f(t)\to\alpha \xrightarrow{\text{limite}} t\to\beta$

E_4) înlocuind în limită $\Rightarrow l=\lim\limits_{t\to\beta} \frac{t}{g(f(t))}$ care se rezolvă

Exp: Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3-x+4$, calculați $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f^{-1}(x)}{x+2}$

E_1) $f'(x)=-3x^2-1=-(3x^2+1)<0 \Rightarrow S\searrow \Rightarrow f$ inj

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3)=-\infty$

$\Rightarrow f$ surj

f continuă

$\Rightarrow f$ bij $\Rightarrow \exists f^{-1}$

E_2) notăm $f^{-1}(x)=t \Rightarrow x=f(t)$

$x\to 2 \Rightarrow f(t)\to 2 \Rightarrow -t^3-t+4\to 2$

Observăm că $t\to 1$ soluție, f bijectivă $\Rightarrow t\to 1$ soluție unică

E_3) $l=\lim\limits_{t\to 1} \frac{t}{f(t)+2}=\lim\limits_{t\to 1} \frac{t}{-t^3-t+4+2}=\frac{1}{4}$

Obs.: Uneori la E_2), t se poate determina cu Horner

[illegible] cu întrucât t

LIMITE DE FUNCȚII CÂND NUMITORUL TINDE LA 0

E_1) tabel de semne pentru numitor și calc l_s, l_d

E_2) $l_s(\alpha) = l_d(\alpha) \Rightarrow \exists \lim_{x \to \alpha} f(x)$

$l_s(\alpha) \neq l_d(\alpha) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to \alpha} f(x)$

Exp 1: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$, Studiați dacă are limită în $x=1$ și în $x=-1$

E_1) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{3}{0?}}{=}$

E_2)

x		-1		1	
x^2-1	$+\,+$	0	$-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+$

E_3) $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{3}{0-}}{=} -\infty$

$l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{3}{0+}}{=} \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1}$

E_4) $l_s(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{-1}{0+}}{=} -\infty$

$l_d(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{-1}{0-}}{=} \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -1}$

M2 DETERMINAREA UNOR PARAMETRI CUNOSCÂND VALOAREA UNOR LIMITE

N3

E_1) înlocuind cu valoarea la care tinde x obținem eventuale condiții NECESARE

E_2) din calcul obținem valori POSIBILE pentru parametrii ceruți

E_3) înlocuim aceste valori posibile în limită și calculăm limita

E_4) dacă limita iese cât ni se dă în enunț $\Rightarrow$ valorile sunt OK

dacă limita nu iese cât e în enunț $\Rightarrow \nexists$ valori pt parametri

Obs: dacă nu obținem cond necesare ci iese direct parametrii, atunci nu mai e necesară verificarea dar pt siguranță e bine să o facem

---

Exp 1: $a, b = ?$ dacă $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+ax+b) = 2$

E_1) înlocuim $\Rightarrow l \overset{\infty+\operatorname{sgn}a\cdot\infty}{=\!=\!=} 2$ și dacă $a \geq 0 \Rightarrow l = \infty$, fals $\Rightarrow$ cond. NECESARĂ $a<0$

E_2) $a<0 \Rightarrow l \overset{\infty-\infty}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-a^2x^2}{\sqrt{x^2+1}-ax}+b\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(1-a^2+\frac{1}{x^2})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-a)}+b\right) \overset{\infty\cdot\operatorname{sgn}(1-a^2)}{=\!=\!=} \frac{}{1-a}$

E_3) Dacă $1-a^2 \neq 0 \Rightarrow l = \pm\infty \neq 2$ fals $\Rightarrow$ cond NECESARĂ $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

Dar, $a<0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

E_4) pt $a=-1 \Rightarrow l = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x(0+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}+b\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}+b\right) \overset{\frac{0}{2}+b}{=\!=\!=} b$

E_5) dar, $l = 2 \Rightarrow \boxed{b=2}$

E_6) val posibile $a=-1, b=2$ le înlocuim

$\Rightarrow l = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x+2) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}+2\right)$

$\frac{1}{\infty}+2 \overset{}{=\!=\!=} 2$ OK $\Rightarrow \begin{matrix} a=-1 \\ b=2 \end{matrix}$ val. cerute

---

Exp 2: $a = ?$ dacă $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$

E_1) $l \overset{\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-1+1-\cos x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax^2}-1}{x^2}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}\cdot a + 2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\right) =$

$= a + \frac{1}{2}$

E_2) $l = \frac{3}{2} \Rightarrow a+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a=1}$

Exp 3. $a, b = ?$ dacă $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^5+bx^8+1}{x-1} = 4$

E_1) înlocuim $\Rightarrow \frac{a+b+1}{0} = 4 \Rightarrow$ e necesar ca $a+b+1=0 \Rightarrow a = -1-b$

E_2) $l = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(-1-b)x^5+bx^8+1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^5+bx^5(x^3-1)}{x-1} = \lim\left(\frac{(1-x)(1+x+\dots+x^4)}{x-1}\cdot(-1) + \right.$

$\left. + \frac{bx^5(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\right) = -5+3b$

E_3) Dar, $l = 4 \Rightarrow -5+3b = 4 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$\Rightarrow a = -1-b = -4 \Rightarrow \boxed{a=-4}$ val posibile

E_4) se înlocuiesc și se arată că verifică

ASIMPTOTE

1) ASIMPTOTE ORIZONTALE - se pot calcula doar dacă D_f nemărginit

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

$l \in \mathbb{R}$ (număr) → $y = l$ as. oriz spre $-\infty$

$l = \pm\infty$ sau $\nexists\, l$ → $\nexists$ as. oriz spre $-\infty$

Analog as. oriz spre ∞

2) ASIMPTOTE OBLICE - se pot calcula doar dacă D_f nemărginit și dacă $\nexists$ as. oriz în direcția respectivă

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$m \in \mathbb{R}$ → $n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$

$n \in \mathbb{R}$ → $y = mx + n$ as. oblică spre $-\infty$

$n = \pm\infty$ sau $\nexists\, n$ → $\nexists$ as. oblică spre $-\infty$

$m = \pm\infty$ sau $\nexists\, m$

Analog spre ∞

3) ASIMPTOTE VERTICALE - se pot calcula doar în capetele deschise și finite ale D_f, se vor calcula limite laterale

$l = \lim_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)$

$l = \pm\infty$ → $x = \alpha$ as. verticală la stânga pt G_f

$l \in \mathbb{R}$ (număr) sau $\nexists\, l$ → $\nexists$ as. verticală la stg pt G_f

---

Ex 1: $f(x) = \ln(x-1)$, $f: D \to \mathbb{R}$

E_1) Cond: $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D_f = (1;\infty)$

E_2) as. oriz:

spre ∞: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x-1) = \frac{\infty}{\infty}$: $\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow G_f$ nu are as. oriz spre ∞

spre $-\infty$ nu e voie să calculăm deoarece $D_f = (1;\infty)$

E_3) as. oblice:

spre ∞: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x} \overset{0\cdot 1}{=\!=} 0$, s-a folosit $\lim_{x_n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0$

$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \ln(x-1) = \infty$

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oblică spre ∞

E_4) as. verticală: $D_f = (1;\infty)$

$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \ln(x-1) \overset{\ln 0_+}{=\!=} \infty$

$\Rightarrow x = 1$ as. vert la dreapta

DEFINIȚIA CONTINUITĂȚII. PUNCTE DE DISCONTINUITATE (N2)

1) continuitatea se poate studia doar în $x=\alpha \in D_f$ (din domeniu)

2) f cont în $x=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$

3) f cont în $x=\alpha \Leftrightarrow$

$(\forall x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n)\to f(\alpha)$

4) Dă a arăta că f nu e cont în $x=\alpha$ sau arătăm că $l_s(\alpha), l_d(\alpha)$ și $f(\alpha)$ NU sunt toate 3 egale între ele, (sau) arătăm că $\exists x_n \to \alpha$ cu $f(x_n)\not\to f(\alpha)$ (sau)

$\exists x_n\to\alpha,\ x'_n\to\alpha$ cu $\lim\limits_{x_n\to\alpha} f(x_n) \neq \lim\limits_{x'_n\to\alpha} f(x'_n)$

5) $x=\alpha \in D_f$ cu f NU e continuă în $x=\alpha$, e pct de DISCONTINUITATE

6) dacă $\alpha\in D_f$, $l_s(\alpha)\in\mathbb{R}$, $l_d(\alpha)\in\mathbb{R}$ dar f NU E CONTINUĂ în $x=\alpha$ atunci $x=\alpha$ pct discont I speță

7) dacă $\alpha\in D_f$, $x=\alpha$ pct de discont care NU E de speța I $\Rightarrow x=\alpha$ e pct de discont de speța II

8) f cont în $\forall$ pct izolat al D_f, oricare ar fi funcția f

9) dacă f elementară și D_f interval și f nu schimbă forma pe $D_f \Rightarrow f$ continuă pe tot D_f

---

Ex 1: $f:(-\infty,3]\cup\{5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$

Studiați continuitatea lui f în

a) $x=-1$ b) $x=4$ c) $x=5$

f elementară pe $(-\infty,3]$ și $x=-1\in D_f$ $\Rightarrow f$ cont în $x=-1$. Deoarece $x=4\notin D_f$ $\Rightarrow$ nu se poate pune problema continuității în $x=4$

Deoarece $x=5$ este punct izolat pt $D_f \Rightarrow f$ cont în $x=5$

Ex 2: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 2\\ \frac{1}{2}, & x=2\end{cases}$ unde $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$. Studiați cont în $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\\ f(2)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Rightarrow f$ cont în $x=2$

Ex 3: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Studiați dacă f cont în $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=-1$$

$$l_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=1$$

Cum $l_s(0)\neq l_d(0) \Rightarrow f$ nu e cont în $x=0$

Deoarece $l_s(0)\in\mathbb{R}$, $l_d(0)\in\mathbb{R}$ și $x=0\in D_f$.

$\Rightarrow x=0$ pct disc I speță

Ex 4: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$, studiați cont în $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ se împarte în 2 limite

$$l_s(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{1-x}\ \frac{1}{0_+}\to\infty$$

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x=1$, $f(1)=1$

$\Rightarrow x=1$ pct disc. II speță

STUDIEREA CONTINUITĂȚII UNEI FUNCȚII CU ACOLADE

(N1)

TIP I: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x<\alpha \\ f_2(x), & x\geq\alpha \end{cases}$ sau altfel definită dar cu inec. în fct de α

E1) f cont pe $(-\infty;\alpha)$ și pe (α,∞) ca și fct elementară

E2) Studiem cont lui f în $x=\alpha$:

$l_s(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)$; $l_d(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x)$

E3) dacă $l_s(\alpha)=l_d(\alpha)=f(\alpha)\Rightarrow$ f cont în $x=\alpha$, dacă nu are loc dubla egalitate $\Rightarrow$ f discont în $x=\alpha$ și studiem tipul de discont.

TIP II $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\mathbb{Q} \\ f_2(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, se cere cont în $x=\alpha$ (deci nu pe $\mathbb{R}$)

E1) $l_1(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x_n\to\alpha \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f(x_n)$ și

$l_2(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x'_n\to\alpha \\ x'_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x'_n)$

E3) dacă $l_1(\alpha)=l_2(\alpha)=f(\alpha)\Rightarrow$ f cont în $x=\alpha$, dacă nu are loc dubla egalitate $\Rightarrow$ f discont în $x=\alpha$ și $x=\alpha$ pct disc. și studiem tipul de discont

---

Exp 1: Studiați cont lui f pe $\mathbb{R}$ unde $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$

E1) f cont pe $(-\infty;0)$ și pe $(0;\infty)$ ca și fct. elementară (1)

E2) studiem dacă f cont în $x=0$

$l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{1+x}=1$

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (x^2+1)=1$

$f(0)=0^2+1=1$

$\Rightarrow$ f cont în $x=0$ (2)

E3) din (1) și (2) $\Rightarrow$ f cont pe $\mathbb{R}$

Exp 2: Studiați cont lui f pe $\mathbb{R}$ unde $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<-1 \\ x+1, & x\geq -1 \end{cases}$

E1) f cont pe $(-\infty;-1)$ și pe $(-1;\infty)$ ca și fct elementară

E2) Studiem dacă f cont în $x=-1$

$l_s(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} \frac{1}{x}=-1$; $l_d(-1)=\ldots=0$; $f(-1)=0$

$\Rightarrow l_s(-1)\ l_d(-1)\in\mathbb{R}$ și f nu e cont în $x=-1$; ... Treabă

Exp 3: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$, se cere cont pe $\mathbb{R}$

E1) f cont pe $(-\infty;0)$ și $(0;\infty)$ ca fct elementară

E2) $l_s(0)=-\infty$; $l_d(0)=1$, $f(0)=1\Rightarrow$ f nu e cont în $x=0$ și cum $l_s(0)\notin\mathbb{R}\Rightarrow$ $x=0$ pct disc II speță

Exp 4: $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in\mathbb{Q} \\ x+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Studiați cont în $x=1$

E1) $l_1(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f(x_n)=1$; $l_2(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x_n)=2$

$f(1)=1\Rightarrow$ f nu e cont în $x=1$

E2) Studiem tipul de discont pt $x=1$

$l_s(1)$ se împarte în 2 limite

$l_s^1(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f(x_n)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{Q}}} x_n^3=1$

$l_s^2(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x_n)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} (x_n+1)=2$

$\Rightarrow \nexists\ l_s(1)\Rightarrow x=1$ pct disc II speță

PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE

1) f continuă $\Rightarrow f$ nu schimbă semnul decât în rădăcini și ca să găsim semnul, e suficient să îl calculăm într-o valoare sau să facem limita într-unul din capete

2) Dacă f continuă pe $(a;b)$ și $f(a)\cdot f(b)<0$ $\Rightarrow \exists$ o rădăcină a lui $f(x)$ pe $(a;b)$

3) Dacă f continuă pe $(a;b)$, $f(a)\cdot f(b)<0$ și f strict monotonă $\Rightarrow \exists$ o rădăcină unică pe $(a;b)$

Exemplu: Găsiți semnul pentru $f(x)=\ln x$, $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$

$E_1)$ $f(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=e^0 \Rightarrow x=1\in(0;\infty)$

$E_2)$

x	0		1		∞
$\ln x$	$\nexists$	$-$	0	$+$	

f continuă $\Rightarrow$ nu poate schimba semnul decât în rădăcini, adică în $x=1$

calculăm $f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}=\ln e^{-1}=-\ln e=-1$

$\Rightarrow f(x)<0,\ \forall x\in(0;1)$

$f(e)=\ln e=1>0 \Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in(1;\infty)$

Ex 2: arătați că $f(x)=x^3+x-1$ are o rădăcină $\in(0;1)$

Este rădăcina unică?

$E_1)$ $f(0)=0-1=-1<0$

$f(1)=1>0$

$\Rightarrow \exists$ o rădăcină $\in(0;1)$

f cont

f strict crescătoare ($f_1+f_2+f_3$ strict crescătoare)

$\Rightarrow$ rădăcină unică.

FUNCȚII CONTINUE ȘI INJECTIVE (N2)

1) f continuă și injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă
2) f continuă și nu e strict monotonă $\Rightarrow f$ nu e injectivă

Exp: Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2011}+1$, arăt. că f este strict monotonă

E_1) f continuă ca și funcție elementară (1)

E_2) $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^{2011}+1=x_2^{2011}+1\Rightarrow x_1^{2011}=x_2^{2011}\ /\sqrt[2011]{\ }$

$\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ injectivă (2)

E_3) Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ strict monotonă

FUNCȚII CU PROPR. LUI DARBOUX

(N3)

1) $(f \in \mathcal{D}b) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a)),$ $\exists c \in (a,b)$ cu $f(c) = \lambda)$

2) deoarece definiția de mai sus e greu de aplicat, vom încerca să o aplicăm abia dacă nu merg alte metode

3) definiția se aplică pt $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

iar λ se alege a.î. să provină și din $f_1(x)$ și din $f_2(x)$ cu x diferit, apoi se scrie $\lambda \in (\lambda - 1, \lambda + 1)$ și $\lambda - 1$ respectiv $\lambda + 1$ se scriu ca $f(a)$ și ca $f(b)$, apoi obținem contradicție

4) cum studiem dacă $f \in \mathcal{D}b$ (?)

E1) f cont $\Rightarrow f \in \mathcal{D}b$

E2) f are disc I spețа $\Rightarrow f \notin \mathcal{D}b$

E3) f ($\forall$ interval) = interval $\Rightarrow f \in \mathcal{D}b$ dacă $\exists I$ interval cu $f(I)$ nu e interval $\Rightarrow f \notin \mathcal{D}b$

E4) folosim definiția pt $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(și de acest tip NU au Darboux)

Exp 1: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, x < 1 \\ 2x, x \geq 1 \end{cases}$, studiați dacă $f \in \mathcal{D}b$

E1) f cont pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, \infty)$ ca fct elementară

E2) $l_s(1) = 1$, $l_d(1) = 2$, $f(1) = 2 \Rightarrow f$ cont în $x = 1$

$\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ are Darboux pe $\mathbb{R}$

Exp 2: $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, x < 1 \\ 2x, x \geq 1 \end{cases}$, studiați dacă $f \in \mathcal{D}b$

E1) f cont pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, \infty)$ ca fct elementară

E2) $l_s(1) = 4$, $l_d(1) = 2$, $f(1) = 2 \Rightarrow f$ nu e cont în $x = 1$ și $x = 1$ pct de disc I spețа

$\Rightarrow f \notin \mathcal{D}b$

Exp 3: $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 3, x = 0 \end{cases}$,

studiați dacă $f \in \mathcal{D}b$

E1) f cont pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$

E2) $l_s(0) \overset{\sin(-\infty)}{=\!=} \nexists \Rightarrow x = 0$ pct de disc II spețа $\Rightarrow$ nu știm ce e cu $\mathcal{D}b$

E3) cum $\sin \frac{1}{x} \in [-1, 1]$ și $3 \notin [-1, 1]$

$\Rightarrow f((-\infty, \infty)) = [-1, 1] \cup \{3\}$ deci avem un interval I cu $f(I)$ nu e interval

$\Rightarrow f \notin \mathcal{D}b$

Exp 4.: $f(x) = \begin{cases} x^3, x \in \mathbb{Q} \\ x^2, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, studiați dacă $f \in \mathcal{D}b$

E1) Fie $\lambda = 64$ pt că $4^3 = 64$ și $8^2 = 64$ deci

$\Rightarrow$ provine din x^3 și x^2 cu x diferit

E2) $\lambda = 64 \in (63; 65) = (f(a), f(b))$

$f(a) = 63 \Rightarrow \underset{a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{\overset{a \in \mathbb{Q}}{<}} \begin{matrix} a^3 = 63 \Rightarrow a = \sqrt[3]{63} \notin \mathbb{Q} \\ a^2 = 63 \Rightarrow a = \pm\sqrt{63} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{matrix}$

(alegem $a = \sqrt{63}$)

analog, alegem $b = \sqrt{65}$

E3) Fie $\lambda = 64 \in (f(\sqrt{63}), f(\sqrt{65}))$, pt. că $\exists c \in (\sqrt{63}; \sqrt{65})$ cu $f(c) = 64$

E4) $c \in \mathbb{Q} \Rightarrow c^3 = 64 \Rightarrow c = 4 \notin (\sqrt{63}; \sqrt{65})$ K.O.

$c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = \pm 8$, K.O. cu $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ pt $\lambda = 64 \in (f(\sqrt{63}), f(\sqrt{65}))$ rezultă că $\nexists c \in (\sqrt{63}, \sqrt{65})$ cu $f(c) = 64$

$\Rightarrow f \notin \mathcal{D}b$.