Data:

CLASA A XI-A

SETUL 2
ANALIZĂ XI, partea 1

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar 2017-2018

ŞIRURI: MONOTONIE ŞI MĂRGINIRE

ŞIRURI RECURENTE DE ORDINUL I

LIMITA UNUI ŞIR, ŞIRURI CONVERGENTE, DIVERGENTE

SUBŞIRURI

NEDETERMINĂRI, CAZURI EXCEPTATE

FACTOR FORȚAT, RAȚIONALIZARE

LIMITE REMARCABILE

DETERMINAREA PARAMETRILOR DIN LIMITE DATE

CRITERII: CESARO-STOLZ, RADICALULUI, RAPORTULUI

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

NOȚIUNI ELEMENTARE DESPRE MULȚIMI (N3)
DE PUNCTE PE DREAPTA REALĂ
(INTERVALE, MĂRGINIRE, VECINĂTĂȚI, $\overline{\mathbb{R}}$)

1) intervale, operații cu intervale

$I_1 \cup I_2 = \{x \mid x \in I_1 \text{ sau } x \in I_2\}$

$I_1 \cap I_2 = \{x \mid x \in I_1 \text{ și } x \in I_2\}$

$I_1 \setminus I_2 = \{x \mid x \in I_1 \text{ și } x \notin I_2\}$

Obs.: folosim reprezentarea pe axă a intervalelor suprapuse

2) mărginire a unei mulțimi

A mărginită $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}$ cu $m \leq x \leq M, \forall x \in A$

Obs.: A nemărginită $\Leftrightarrow$ cel puțin la un capăt nu e mărginită

Obs.: toate numerele $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $\alpha \leq x, \forall x \in A$ se numesc MINORANȚI, cel mai mare minorant se numește INFIMUM

Obs.: toate numerele $\beta \in \mathbb{R}$ cu $x \leq \beta, \forall x \in A$ se numesc MAJORANȚI, cel mai mic dintre majoranți se numește SUPREMUM

Obs.: $\exists \inf A, \exists \sup A$ dar NU ÎNTOTDEAUNA $\exists \min A, \max A$

3) mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$ (=dreapta reală închisă)

$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; \infty]$

4) vecinătăți ale unui punct

$\alpha \in \mathbb{R}$, V este vecinătate pt α dacă $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset V$

Obs.: $V \in \mathcal{V}_{x=\alpha} \Leftrightarrow V$ conține un interval deschis centrat în α

$\alpha = -\infty$, V este vecinătate a lui $-\alpha$ dacă $\exists \varepsilon$ a.î. $[-\infty, \varepsilon) \subset V$

$\alpha = \infty$, V este vecinătate a lui ∞ dacă $\exists \varepsilon$ a.î. $(\varepsilon, \infty] \subset V$

Exp 1: pt $A = (1, 3] \Rightarrow$ A mărginită,
$\exists \inf A = 1, \exists \sup A = 3$,
$\nexists \min A, \exists \max A = 3$
exemplu de minoranți: $-3; 0; 1$
exemplu de majoranți: $3, 4, 7, 11$

Exp 2: determinați
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
b) $B = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \leq 3\}$

a) $A = (-\infty; 3]$
b) $B = [-\infty; 3]$

Exp 3: Studiați dacă $V \in \mathcal{V}_{x=\alpha}$
a) $V = (-1; 5), \alpha = 2$
b) $V = (-1, 5], \alpha = -1$
c) $V = (-1, 5], \alpha = 5$
d) $V = (-1, 5], \alpha = 6$
e) $V = (-2, \infty], \alpha = 3$
f) $V = (-2, \infty], \alpha = \infty$

a) DA b) NU c) NU
d) NU e) NU f) DA

MONOTONIA UNUI ȘIR

x_n s↑ $\Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$ (strict crescător)

x_n s↓ $\Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$ (strict descrescător)

x_n ↑ $\Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n$ (crescător)

x_n ↓ $\Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n$ (descrescător)

Obs1: dacă x_n s↑ $\Rightarrow x_n$ ↑

dacă x_n s↓ $\Rightarrow x_n$ ↓

Obs2: reciproc NU e adevărat,

adică x_n ↑ $\not\Rightarrow x_n$ s↑ nici

dacă x_n ↓ $\not\Rightarrow x_n$ s↓

Obs3: Pentru a arăta că x_n monoton folosim crit. diferenței sau crit. raportului, pentru a arăta că x_n nu e monoton e suficient să găsim o ordonare diferită a 3 termeni consecutivi

crit diferenței: calculăm $x_{n+1} - x_n$ și comparăm cu 0, astfel

$x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

$x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

$x_{n+1} - x_n \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow x_n$ ↑

$x_{n+1} - x_n \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_n$ ↓

crit. raportului: se poate folosi doar dacă x_n are toți termenii pozitivi, comparăm $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cu 1

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow x_n$ ↑

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_n$ ↓

Exemplu 1: $x_n = \frac{2n+1}{3n-1}$, $n \geq 2$, se cere monot.

met I: $x_{n+1} - x_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-1} - \frac{2n+1}{3n-1} =$

$= \frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{6n^2+7n-3-(6n^2+7n+2)}{(3n+2)(3n-1)} =$

$= \frac{-5}{(3n+2)(3n+1)} < 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow$

$x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

met II: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-1}}{\frac{2n+1}{3n-1}} = \frac{2n+3}{3n+2} \cdot \frac{3n-1}{2n+1} =$

$= \frac{6n^2+7n-3}{6n^2+7n+2} < 1$ și cum x_n are toți term. pozitivi $\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

Exemplu 2: $x_n = \frac{3^{2n+1}}{2^n}$, $n \geq 1$, se cere monot.

met I: $x_{n+1} - x_n = \frac{3^{2n+3}}{2^{n+1}} - \frac{3^{2n+1}}{2^n} =$

$= \frac{3^{2n+1}(9-2)}{2^{n+1}} = \frac{3^{2n+1} \cdot 7}{2^{n+1}} > 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

met II: x_n are toți termenii pozitivi, calc. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{2n+3}}{2^{n+1}}}{\frac{3^{2n+1}}{2^n}} = \frac{3^{2n+3}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{3^{2n+1}} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

Exemplu 3: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$

met I: $x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} =$

$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot n - (-1)^n}{n(n+1)} = \frac{(-1)^n(-n-1)}{n(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

care nu-l putem compara cu 0

dăm valori, $x_1 = \frac{-1}{1} = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{-1}{3}$

$\Rightarrow x_1 < x_2 > x_3 \Rightarrow$ ordonare diferită

$\Rightarrow x_n$ nu e monoton

(N2) DEMONSTRAREA MĂRGINIRII UNUI ȘIR (N2)

Dacă $\exists m, M \in \mathbb{R}$ a.î. $m \leq x_n \leq M \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n$ mărginit (adică toți termenii sunt între două numere)
Dacă cel puțin la un capăt nu e mărginit
$\Rightarrow x_n$ nemărginit

Obs: se intuiesc capetele (prin datul valorilor lui n) și dacă x_n e mărginit, se arată prin calcul acest lucru

Exp: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, studiați mărginirea

E1) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$; $x_4 = \frac{1}{4}$, ...

E2) Obs. că $x_n \in [0; 1]$

E3) arătăm că $0 \leq x_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

• adev $\Rightarrow x_n$ mărginit

Exp 2: $x_n = 2^n$, $n \geq 1$, studiați mărginirea

E1) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$, $x_4 = 16$, ...

E2) ... $\Rightarrow x_n$ nemărginit pt că $\nexists M$

~~(N2)~~ ȘIRURI RECURENTE DE ORDINUL I (N3)

MONOTONIA

E1) calculăm a_2, comparăm a_1 cu a_2 și deducem ordinea dintre a_n și a_{n+1}

E2) arătăm prin inducție monotonia

Exp1.: $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$, $a_1=5$. Se cere monotonia

$E_1)$ $a_2=\sqrt{6+a_1}=\sqrt{6+5}=\sqrt{11}=3,\ldots \Rightarrow a_2<a_1$

$E_2)$ arătăm că $a_{n+1}<a_n$, $\forall n\geq 1$ prin inducție

I $P(1)$: $a_2<a_1$ adev din E1)

II Ip. $P(k)$ adev. $\overset{(?!)}{\Longrightarrow} P(k+1)$ adev, unde

$P(k)$: $a_{k+1}<a_k$

$P(k+1)$: $a_{k+2}<a_{k+1}$

Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow a_{k+1}<a_k \mid +6$

$\Rightarrow 6+a_{k+1}<6+a_k \mid \sqrt{\ldots} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{6+a_{k+1}}<\sqrt{6+a_k} \Rightarrow a_{k+2}<a_{k+1}$

$\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n\geq 1$

$E_3)$ Deci, $a_{n+1}<a_n \Rightarrow a_n>a_{n+1} \Rightarrow a_n \searrow$

(N2) ŞIRURI RECURENTE DE ORDINUL I (N3)

MĂRGINIREA

E_1) Se studiază monotonia lui a_n şi:
dacă $a_n \nearrow \Rightarrow a_n \geq a_1$, dacă $a_n \searrow \Rightarrow a_n \leq a_1$

E_2) Dăm a_n monoton $\Rightarrow \exists l = \lim_n a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ (deoarece orice şir monoton are limită, finită sau infinită)

E_3) Trecem la limită în relaţia de recurenţă folosind că dacă $\lim_n a_n = l$ atunci şi $\lim_n a_{n+1} = l$.

E_4) Dacă l este finită, facem calcule şi dacă găsim valoarea lui l finită, atunci prin inducţie arătăm că este cealaltă margine a şirului

Dacă l nu este finită, sau dacă l finită dar nu iese inducţia atunci $l = \pm\infty$, şi folosind monotonia avem: $a_n \nearrow \Rightarrow l = \infty$ respectiv $a_n \searrow \Rightarrow l = -\infty$

Exp.: $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$, $a_1 = 5$. Se cere mărginirea

E_1) $a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+5} = \sqrt{11} = 3,.. \Rightarrow a_2 < a_1$, se arată prin inducţie că $a_n \searrow \Rightarrow a_n \leq a_1 \Rightarrow \boxed{a_n \leq 5}$

E_2) Dăm $a_n \searrow \Rightarrow \exists l = \lim_n a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Trecem la limită în relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \Rightarrow l = \sqrt{6+l}$. Dacă l finită $\xrightarrow{(\cdot)^2} l^2 = 6+l \Rightarrow l^2 - l - 6 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} l=-2 \\ \text{sau} \\ l=3 \end{matrix}$.

Dar, $l = -2$ e fals pt că $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \Rightarrow a_n$ pozitiv

E_3) arăt. că $a_n \geq 3$, $\forall n \geq 1$. $P(1)$: $a_1 \geq 3 \Leftrightarrow 5 \geq 3$ adev.

Ip. $a_k \geq 3 \xrightarrow{(?)} a_{k+1} \geq 3$. Dăm $a_k \geq 3 \mid +6 \Rightarrow 6+a_k \geq 9 \mid \sqrt{\cdots}$

$\Rightarrow \sqrt{6+a_k} \geq 3 \Rightarrow a_{k+1} \geq 3 \Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow a_n \geq 3 \Rightarrow a_n \in [3;5]$

Exp 2: $a_{n+1} = 3a_n + 1$, $a_1 = 1$. Calc $a_2 = 3+1 = 4 \Rightarrow a_1 < a_2$, arăt. $\searrow$ sau $\nearrow \Rightarrow \exists \lim a_n = l$, trecem la limită $\Rightarrow l = 3l+1 \Rightarrow l = -\frac{1}{2}$ finită şi cum $a_n \nearrow \Rightarrow \boxed{l = \infty}$

LIMITA UNUI ȘIR. ȘIR CONVERGENT. ȘIR DIVERGENT

(N2)

1) *limita unui șir* este „numărul finit" sau „∞" sau „$-\infty$" de care se apropie term. șirului de la un moment dat (este din $\overline{\mathbb{R}}$)

2) *un șir e convergent* dacă limita lui e finită (e număr)

3) *un șir e divergent* ⇔ șirul nu e convergent

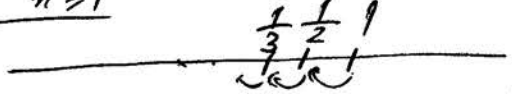
Obs 1: șir divergent poate fi
- cu limită, dar limita sa este ∞ sau $-\infty$
- fără limită

Obs 2: dacă x_n monoton ⇒ x_n are limită, reciproc NU

Obs 3: dacă x_n monot + mărg ⇒ ⇒ x_n convergent (WEIERSTRASS)

Obs 4: x_n converg ⇒ x_n mărg
x_n converg $\not\Rightarrow$ x_n monoton

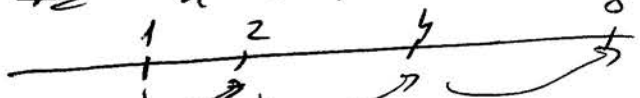
Exp 1: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, studiați converg.



$\Rightarrow \lim\limits_n x_n = \lim\limits_n \frac{1}{n} \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=} 0$

⇒ x_n are limită, e convergent, nu e divergent

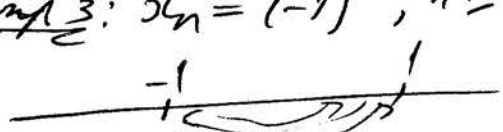
Exp 2: $x_n = 2^n$, $n \geq 0$



$\Rightarrow \lim\limits_n x_n = \lim\limits_n 2^n \overset{2^\infty}{=\!=} \infty$

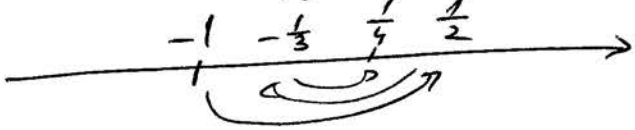
⇒ x_n are limită, nu e converg, e divergent

Exp 3: $x_n = (-1)^n$, $n \geq 1$



⇒ $\nexists \lim\limits_n x_n$ ⇒ x_n nu e converg
⇒ x_n e divergent

Exp 4: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$



⇒ $\lim\limits_n x_n = 0$ ⇒ x_n converg
⇒ x_n nu e diverg

Exp 5: Fără a calcula limita, arăt. că $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ e converg,

E_1) monot:

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)} =$

$= -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$

⇒ $x_n \searrow$ (1)

E_2) mărg:

$x_n \searrow \Rightarrow x_n \leq x_1 \Rightarrow x_n \leq 1$

Cum $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n > 0 \Rightarrow x_n \geq 0$

⇒ $x_n \in [0;1] \Rightarrow x_n$ mărg (2)

E_3) din x_n monot + mărg ⇒
⇒ x_n converg

(M2) **SUBȘIR AL UNUI ȘIR** (N2)

Dacă x_n este un șir $\Rightarrow y_n$ este subșir al x_n dacă y_n conține o infinitate de termeni neconsecutivi din x_n

Exp: $x_n = n$, $y_n = 2n, n \geq 1$ este subșir al x_n deoarece $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$\{y_n\} = \{2, 4, 6, \dots\}$

Obs: y_n subșir al $x_n \Leftrightarrow$ toți termenii lui y_n sunt în x_n

Obs 1: Dacă $x_n \to l \Rightarrow \forall$ subșir $y_n \to l$

Obs 2: Dacă toate subșirurile ce completează un șir au limita $l \Rightarrow$ șirul inițial are limita l

Exp: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ șir și $y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n}$ și $z_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$

$\Rightarrow y_n, z_n$ subșiruri ale x_n și y_n, z_n completează pe x_n (adică $\{y_n\} \cup \{z_n\} = \{x_n\}$)

$y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$; $z_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1} \to 0$

$\Rightarrow \lim_n x_n = 0$

Obs 3: Dacă $\exists$ 2 subșiruri ale x_n cu limita diferită

OPERAȚII CU LIMITE DE ȘIRURI

(N2)

unele limite se pot calcula direct, prin înlocuirea lui n cu infinit și intuitiv, pentru α număr, deducem că:

1) $\infty+\infty=\infty$	2) $\infty+\alpha=\infty$
3) $\infty-\alpha=\infty$	4) $\alpha-\infty=-\infty$
5) $\infty\cdot\infty=\infty$	6) $\infty\cdot(-\infty)=-\infty$
7) $\frac{\alpha}{\pm\infty}=0$	8) $\frac{0}{\pm\infty}=0$
9) $\infty^{\infty}=\infty$	10) $\infty^{-\infty}=0$
11) $\alpha\cdot\infty=\begin{cases}\infty, \alpha>0\\ 0, \alpha=0\\ -\infty, \alpha<0\end{cases}$	12) $\alpha\cdot(-\infty)=\begin{cases}\infty, \alpha<0\\ 0, \alpha=0\\ -\infty, \alpha>0\end{cases}$
13) $\frac{\alpha}{0_+}=\begin{cases}-\infty, \alpha<0\\ 0, \alpha=0\\ \infty, \alpha>0\end{cases}$	14) $\frac{\alpha}{0_-}=\begin{cases}\infty, \alpha<0\\ 0, \alpha=0\\ -\infty, \alpha>0\end{cases}$
15) $\alpha^{\infty}=\infty, \forall \alpha>1$	16) $\alpha^{-\infty}=0, \forall \alpha>1$
17) $\infty^{\alpha}=\begin{cases}0, \alpha<0\\ 1, \alpha=0\\ \infty, \alpha>0\end{cases}$	18)** $(-\infty)^{\alpha}=\begin{cases}0, \alpha<0\\ 1, \alpha=0\\ (-1)^{\alpha}\cdot\infty, \alpha>0\end{cases}$
19) $\alpha^{\infty}=\begin{cases}\nexists, \alpha\le -1\\ 0, \alpha\in(-1;1)\\ 1, \alpha=1\\ \infty, \alpha>1\end{cases}$	20)** $\alpha^{-\infty}=\begin{cases}0, \alpha<-1\\ \nexists, \alpha\in[-1;0)\\ 0, \alpha=0\\ \infty, \alpha\in(0;1)\\ 1, \alpha=1\\ 0, \alpha>0\end{cases}$

Obs.: Dacă α este limita unui șir neconstant $\Rightarrow$ limitele care se încadrează în cazurile

1) $\boxed{\infty-\infty}$ 2) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ 3) $\boxed{\frac{0}{0}}$ 4) $\boxed{\infty\cdot 0}$

5) $\boxed{1^{\infty}}$ 6) $\boxed{\infty^{0}}$ 7) $\boxed{0^{0}}$ 8) $\boxed{0^{\infty}}$

nu se pot calcula direct (se numesc NEDETERMINĂRI)

Exp 1: $\lim\limits_n (n^2+n) \overset{\infty+\infty}{=\!=} \infty$

Exp 2: $\lim\limits_n (n^2+3) \overset{\infty+3}{=\!=} \infty$

Exp 3: $\lim\limits_n (n^2-3) \overset{\infty-3}{=\!=} \infty$

Exp 4: $\lim\limits_n (3-n^2) \overset{3-\infty}{=\!=} -\infty$

Exp 5: $\lim\limits_n ((n^2+1)(n+2)) \overset{\infty\cdot\infty}{=\!=} \infty$

Exp 6: $\lim\limits_n ((n^2+1)\cdot(-n)) \overset{\infty\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty$

Exp 7.1: $\lim\limits_n \frac{2}{n^2+1} \overset{\frac{2}{\infty}}{=\!=} 0$

Exp 7.2: $\lim\limits_n \frac{2}{-n^2+1} \overset{\frac{2}{-\infty}}{=\!=} 0$

Exp 8: $\lim\limits_n \frac{0}{n^2+2} = \lim\limits_n 0 = 0$

Exp 9: $\lim\limits_n (n^2+1)^{-n} \overset{\infty^{-\infty}=\frac{1}{\infty^{\infty}}}{=\!=} 0$

Exp 10: $\lim\limits_n -5(n^2+1) \overset{-5\cdot\infty}{=\!=} -\infty$

Exp 11: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\frac{1}{n}} \overset{\frac{3}{0_+}}{=\!=} \infty$

Exp 12: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{-\frac{1}{n}} \overset{\frac{3}{0_-}}{=\!=} -\infty$

Exp 13: $\lim\limits_n (n^2+1)^{-2} \overset{\infty^{-2}=\frac{1}{\infty^2}}{=\!=} 0$

Exp 14: $\lim\limits_n (n^2+1)^3 \overset{\infty^3}{=\!=} \infty$

Exp 15: $\lim\limits_n (-2)^n \nexists$

Exp 16: $\lim\limits_n 1^{n^2+1} = \lim\limits_n 1 = 1$

Exp 17: $\lim\limits_n 2^{n^2+1} \overset{2^{\infty}}{=\!=} \infty$

CALCULUL LIMITEI UNUI ȘIR PRIN METODA FACTORULUI COMUN FORȚAT

(N2)

E_1) se dă factor comun forțat atât la numărător cât și la numitor

E_2) se folosește $\frac{\alpha}{\infty} \to 0$

Obs.: metoda se poate folosi și în cazul unor radicali sau a unor polinoame

---

Ex 1: $\lim\limits_{n} \frac{n^2+2n}{-n+3}$

$E_1)\ l \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(-1+\frac{3}{n}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{-1+\frac{3}{n}} \overset{\frac{\infty(1+0)}{-1}}{=\!=} -\infty$

Ex 2: $\lim\limits_{n} \frac{-3n^2+5}{2n^2+4n+1}$

$E_1)\ l \overset{\frac{-\infty+5}{\infty+\infty+1}}{=\!=} \lim\limits_{n} \frac{n^2\left(-3+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$

$\frac{-3+0}{2+0+0} = -\frac{3}{2}$

Ex 3: $\lim\limits_{n}(-2n+3n^2-5)$

$E_1)\ l = \lim\limits_{n} n^2\left(-\frac{2}{n}+3-\frac{5}{n^2}\right)$

$\infty(0+3-0) = \infty$

Ex 4: $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{4n^2+n+1}}{n+2}$

$E_1)\ l \overset{\frac{\sqrt{\infty+\infty+1}}{\infty+2}}{=\!=} \lim\limits_{n} \frac{n\cdot\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}$

$\frac{\sqrt{4+0+0}}{1+0} = 2$

Ex 5: $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{3n+1}$

$E_1)\ l = \lim\limits_{n} \frac{n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}$

$= \lim\limits_{n} \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}$

$\frac{\sqrt{1+1}}{3} = \frac{2}{3}$

CALCUL LIMITEI UNUI ȘIR PRIN METODA

(N2)

AMPLIFICĂRII CU CONJUGATUL

- se folosește atunci când apar radicali (de obicei cazul $\infty - \infty$)
- se amplifică cu conjugatul șirului nostru

se deduce conjugatul care trebuie

număr	conjugat	rezultat
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$a-b$
$\sqrt{a}-b$	$\sqrt{a}+b$	$a-b^2$
$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a-b$
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a+b$

Exp 1: $\lim_n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = ?$

$$\ell = \lim_n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim_n \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \overset{\frac{1}{\infty+\infty}}{=\!=} 0$$

Exp 2: $\lim_n (\sqrt{n^2+n}-n) = ?$

E1) $\ell = \lim_n (\sqrt{n^2+n}-n) \overset{\infty-\infty}{=\!=}$

$$= \lim_n \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_n \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim_n \frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} =$$

$$\frac{1}{1+1} \quad \frac{1}{2}$$

met II

$$\ell = \lim_n (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2}) = \lim_n \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}}$$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{\quad}+1} = \frac{1}{2}$$

Exp 3: $\lim_n (\sqrt[3]{n^2+3}-\sqrt[3]{n^2+1}) \overset{\infty-\infty}{=\!=}$

$$= \lim_n \frac{n^2+3-n^2-1}{\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+3)(n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \overset{\frac{2}{\infty}}{=\!=} 0$$

Exp 4: $\lim_n (\sqrt[3]{n^3+n}-n) =$

$$= \lim_n (\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3}) \overset{\infty-\infty}{=\!=}$$

$$= \lim_n \frac{n^3+n-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n)\cdot n^3}+\sqrt[3]{(n^3)^2}}$$

$$= \lim_n \frac{n}{n^2\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}+n^2\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})}+n^2}$$

$$= \lim_n \frac{n}{n^2(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})}+1)}$$

$$\frac{1}{\infty\cdot\infty} \overset{}{=\!=} 0$$

Exp 5: $\lim_n (\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^2+n}) =$

$$= \lim_n \frac{n^3+1-n^2-n}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+1)(n^2+n)}+\sqrt[3]{(n^2+n)^2}}$$

$$= \lim_n \frac{n^3(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^3\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^3})^2}+n\cdot n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^3})(1+\frac{1}{n})}+n^{4/3}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}}$$

$$= \lim_n \frac{n^3(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^3(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^3})^2}+n^{-1/3}\sqrt[3]{(\quad)(\quad)}+n^{-5/3}\sqrt[3]{(\quad)^2})} = 1$$

LIMITE REMARCABILE

1) $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) =$ limita termenului maxim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{gr } P < \text{gr } Q \\ \text{raportul coef. gr. max.}, & \text{gr } P = \text{gr } Q \\ (\text{raportul coef. gr. max.}) \cdot \infty, & \text{gr } P > \text{gr } Q \end{cases}$$

2) $$\lim_{x_n\to\infty} q^{x_n} = \begin{cases} \nexists, & q < -1 \\ \nexists, & q = -1 \\ 0, & q \in (-1;1) \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

3) $$\lim_{x_n\to\infty} \frac{P(n)}{a^{x_n}} = \begin{cases} \infty \cdot \lim\limits_n P(n), & a \in (0;1) \\ 0, & a \in (1,\infty) \end{cases}$$

4) $$\lim_{x_n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0$$

5) $$\lim_{x_n\to 0} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$$

6) $$\lim_{x_n\to 0} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$$

7) $$\lim_{x_n\to 0} \frac{(1+x_n)^p - 1}{x_n} = p$$

8) $$\lim_{x_n\to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n\to 0} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n\to 0} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1$$

Obs.: nu sunt limite remarcabile

$\lim\limits_{x_n\to 0} \frac{\cos x_n}{x_n}$, nici $\lim\limits_{x_n\to 0} \frac{\arccos x_n}{x_n}$

nici $\lim\limits_{x_n\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x_n}{x_n}$, nici $\lim\limits_{x_n\to 0} \frac{\operatorname{arcctg} x_n}{x_n}$

9) $$\lim_{x_n\to 0} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$$

EXEMPLE PENTRU LIMITE REMARCABILE

Exp 1 a) $\lim_n (3n - n^3 + 8) = ?$

met I: $\lim_n (3n - n^3 + 8) = \lim_n (-n^3) = -\infty$

s-a folosit $\lim_n P(n) =$ limita term de grad maxim

met II: $\lim_n (3n - n^3 + 8) = \lim_n n^3\left(\frac{3}{n^2} - 1 + \frac{8}{n^3}\right)$

$\infty \cdot (0 - 1 + 0) = -\infty$

Exp 1 b) $\lim_n \frac{-2n^3 + 5n}{n^2 + 3} = ?$

met I: $\lim_n \frac{-2n^3 + 5n}{n^2 + 3} \overset{grP > grQ}{=\!=} \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \infty = -\infty$

s-a folosit $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = (\text{raportul coef gr maxim}) \cdot \infty$

pt $grP > grQ$

Exp 2 $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$, s-a folosit

$\lim_{n\to\infty} q^{x_n} = 0$ pt $q = -\frac{2}{3} \in (-1, 1)$,

$x_n = n \to \infty$

Exp 3 $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2 + 1}{(0,2)^n} = \infty \cdot \lim_n (-n^2 + 1) = -\infty$,

s-a folosit $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{a^{x_n}} = \infty \cdot \lim_n P(n)$

pt $a = 0,2 \in (0,1)$, $x_n = n \to \infty$

Exp 4: $\lim_n \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+n} = \lim_n \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^2+n}$

$\overset{0 \cdot 1}{=\!=} 0$, s-a folosit $\lim_{x_n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0$

cu $x_n = n^2 + 1 \to \infty$ si $\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)}$ pt $grP = grQ$

Exp 5: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n+1}} = \lim_n \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} =$

$= \lim_n \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n+1}{n} = \ln 2 \cdot 1 = \ln 2$, s-a folosit $\lim_{x_n\to 0} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$ pt $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

Exp 6: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{2}{n+1}} = \lim_n \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1}}$

$= \lim_n \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n+1}{2n} = 1 \cdot \frac{1}{2}$, s-a folosit $\lim_{x_n\to 0} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$, pt $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

Exp 7: $\lim_{x_n\to 0} \frac{(1+\frac{1}{n})^7 - 1}{\frac{1}{n}} = 7$, s-a folosit

$\lim_{x_n\to 0} \frac{(1+x_n)^p - 1}{x_n} = p$ pt $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

Exp 8: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1}}$

$= \lim_n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n+1}{2n} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, s-a folosit $\lim_{x_n\to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ pt $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

Exp 9: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+3} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1} \cdot (2n+3)} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n+3}{n+1}} =$

$= e^{\lim_n \frac{2n+3}{n+1}} = e^2$, s-a folosit

$\lim_{x_n\to 0} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$ pt

$x_n = \frac{1}{n+1} \to 0$

CAZURI EXCEPTATE (NEDETERMINĂRI) (N2)

- cazurile exceptate sunt limite care nu pot fi calculate direct și pentru a căror rezolvare trebuie folosite cel puțin una din metodele: 1) factor forțat
2) amplificare cu conjugatul
3) limite remarcabile

- cazurile exceptate sunt
1) $\boxed{\infty-\infty}$ 2) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ 3) $\boxed{\frac{0}{0}}$ 4) $\boxed{\infty\cdot 0}$
5) $\boxed{1^\infty}$ 6) $\boxed{\infty^0}$ 7) $\boxed{0^\infty}$ 8) $\boxed{0^0}$

Obs 1: în aceste limite, 1 și 0 NU SUNT NUMERE, ci limite de șiruri recunoscute

Obs 2: pt $\boxed{1^\infty}$ folosim $\boxed{\lim_{x_n\to 0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e}$

Obs 3: pt $\boxed{\infty^0}$, $\boxed{0^\infty}$, $\boxed{0^0}$ folosim $\boxed{f^g=e^{g\ln f}}$

Exp 1: $\lim_n (3^n-5^n) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_n 5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right) = \overset{\infty(0-1)}{=} -\infty$

Exp 2: $\lim_n (\sqrt{n^2+1}-n) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_n \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$= \lim_n \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$

Exp 3: $\lim_n \frac{5^n+2^n}{6^n+3^n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_n \frac{5^n\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{6^n\left(1+\left(\frac{3}{6}\right)^n\right)}$

$= \lim_n \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{6}\right)^n} \overset{0\cdot\frac{1+0}{1+0}}{=} 0$

Exp 4: $\lim_n \frac{3n^2+n}{-5n^2+1} \overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=} \lim_n \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(-5+\frac{1}{n^2}\right)} = -\frac{3}{5}$

Exp 5: $\lim_n \frac{\frac{1}{-5n^2+1}}{\frac{3}{2n^2+n}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_n \frac{2n^2+n}{3(-5n^2+1)} =$

$= \lim_n \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(-15+\frac{3}{n^2}\right)} = -\frac{2}{15}$

Exp 6: $\lim_n \sqrt{n^2+1}\cdot(n^2+n)^{-3} \overset{\infty\cdot 0}{=}$

$= \lim_n \frac{\sqrt{n^2+1}}{(n^2+n)^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_n \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\left[n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^3}$

$= \lim_n \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \overset{\frac{1}{\infty(1+0}}{=} 0$

n^5

Exp 7: $\lim_n \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{5n+7} \overset{1^\infty}{=}$

$= \lim_n \left(1+\frac{2n+1}{2n-3}-1\right)^{5n+7} =$

$= \lim_n \left[\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{4}}\right]^{\frac{4}{2n-3}\cdot(5n+7)} =$

$= e^{\lim_n \frac{20n+28}{2n-3}} = e^{\lim_n \frac{n\left(20+\frac{28}{n}\right)}{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}} = e^{\frac{20}{2}} = e^{10}$

Exp 8: $\lim_n \left(\frac{1}{n}\right)^n \overset{0^\infty}{=} \lim_n e^{n\cdot\ln\frac{1}{n}} =$

$= e^{\lim_n n\cdot(-\ln n)} \overset{\infty(-\infty)}{=} e^{-\infty} \overset{\frac{e}{e^{-\infty}}}{=} 0$

DETERMINAREA UNOR PARAMETRI CUNOSCÂND VALOAREA UNOR LIMITE DE ȘIRURI (N3)

E_1) înlocuim pe n cu ∞ și obținem eventualele condiții NECESARE

E_2) din calcul obținem valorile parametrilor ceruți

Obs.: pentru verificare, putem înlocui valorile obținute pentru parametri și studiem dacă obținem limita cerută

Exp: $a, b = ?$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}+an+b) = 2$

E_1) înlocuim $\Rightarrow l \overset{\infty+\operatorname{sgn} a\cdot\infty+b}{=\!=\!=} 2$

Dacă $a = 0 \Rightarrow l \overset{\infty+0+b}{=\!=\!=} \infty$ fals

Dacă $a > 0 \Rightarrow l \overset{\infty+\infty+b}{=\!=\!=} \infty$ fals

așadar condiție NECESARĂ este ca $\boxed{a<0}$ deoarece în acest caz $l \overset{\infty-\infty}{=\!=\!=}$ deci l poate să dea 2

E_2) $l \overset{\infty-\infty}{=\!=\!=} \lim\limits_n\left(\frac{n^2+1-a^2n^2}{\sqrt{n^2+1}-an}+b\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_n\left(\frac{n^2(1-a^2)+1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-a\right)}+b\right) = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_n \frac{n^2\left(1-a^2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-a\right)} = 2-b$

$\Rightarrow \lim\limits_n \frac{n\left(1-a^2+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-a} \overset{\infty(1-a^2+0)}{=\!=\!=} 2-b$

E_3) Dacă $1-a^2\neq 0 \Rightarrow l \overset{\infty\cdot\operatorname{sgn}(1-a)}{=\!=\!=} \pm\infty$ ceea ce e fals pt că limita trebuie să fie $2-b$

$\Rightarrow$ cond. NECESARĂ

$1-a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ și cum $a<0$

$\Rightarrow \boxed{a=-1}$

E_4) $\lim\limits_n \frac{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = 2-b$

$\Rightarrow \lim\limits_n \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \overset{\frac{0}{\sqrt{2}}}{=\!=\!=} 2-b$

$\Rightarrow 0 = 2-b \Rightarrow \boxed{b=2}$

Așadar, $a=-1$

$b=2$

PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CE TIND LA 0

(N2)

1) $x_n \to 0$, y_n mărginit $\Rightarrow x_n \cdot y_n \overset{0\cdot[\,]}{=\!=} 0$

2) $x_n \to \pm\infty$, y_n mărginit $\Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \overset{\frac{[\,]}{\pm\infty}}{=\!=} 0$

3) $|x_n| \to 0 \Leftrightarrow x_n \to 0$

4) CRITERIUL MAJORĂRII

$|x_n - l| \le y_n$, $y_n \to 0 \Rightarrow x_n \to l$

Exp 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} \cdot \cos n \overset{0\cdot[-1,1]}{=\!=} 0$

Exp 2: $\lim\limits_n \frac{\sin n}{n} \overset{\frac{[-1,1]}{\infty}}{=\!=} 0$

Exp 3: $\lim\limits_n \frac{\cos n}{\frac{1}{n}} \overset{\frac{[-1,1]}{0}}{=\!=}$ deci NU pot folosi limita de mai sus

Exp 4: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, se cere $\lim\limits_n x_n$

$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$

Cum $|x_n| \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$

Exp 5: Dacă $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < \left(\frac{5}{7}\right)^n$, se cere $\lim\limits_n x_n$

E1) Deoarece $\lim\limits_n \left(\frac{5}{7}\right)^n \overset{2^n}{=\!=} 0$, $2 \in (-1,1)$

și $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < \left(\frac{5}{7}\right)^n \Rightarrow$

E2) $\lim\limits_n \left|x_n - \frac{3}{2}\right| \le \lim\limits_n \left(\frac{5}{7}\right)^n$

$\Rightarrow \lim\limits_n \left|x_n - \frac{3}{2}\right| \le 0$, $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_n \left|x_n - \frac{3}{2}\right| = 0 \Rightarrow x_n \to \frac{3}{2}$

CRITERIUL CLEȘTELUI (N2)

Dacă $a_n < b_n < c_n$ și $a_n \to l$, $c_n \to l$

$\Rightarrow b_n \to l$

Scriem astfel

$$\left.\begin{array}{l} a_n < b_n < c_n \\ \to l \quad l \end{array}\right\} \Rightarrow b_n \to l$$

Obs: relație e adevărată și dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$ sau $a_n < b_n \leq c_n$ sau $a_n \leq b_n < c_n$

Obs. 2: dacă x_n este o sumă,

E_1) scriem suma desfășurat

E_2) încadrăm fiecare termen în funcție de cel mai mic, respectiv cel mai mare

E_3) se adună inegalitățile obținute $\Rightarrow a_n \leq x_n \leq b_n$ cu x_n șirul nostru

E_4) dacă $a_n \to l$ și $b_n \to l \Rightarrow x_n \to l$

dacă a_n și b_n au limite diferite, căutăm o încadrare „mai strânsă"

Exp 1: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, se cere $\lim_n x_n$ cu crit. clește lui

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \to 0 \qquad\quad 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

Exp 2: $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, se cere $\lim x_n$

E_1) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

E_2) $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

- - - - - - - - - - -

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

E_3) „+": $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

E_4) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{\frac{1}{1}} 1$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$

E_5) deci,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \\ \to 1 \qquad\quad 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n \to 1$

CRITERII DE CONVERGENȚĂ (N3)

1) LEMA LUI CESARO-STOLZ

Dacă se cere $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = ?$ unde $b_n \nearrow \infty$ (sau $b_n \searrow 0$) și se poate calcula $\lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l$

2) CRITERIUL RABICALULUI

Dacă se cere $\lim_n \sqrt[n]{x_n}$ și se poate calcula $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = l$

3) CRITERIUL RAPORTULUI

Dacă se cere $\lim_n x_n$ și se poate calcula $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$, atunci

pt $l \in [0;1) \Rightarrow \lim_n x_n = 0$

pt $l \in (1;\infty] \Rightarrow \lim_n x_n = \pm\infty$ în funcție de semnul lui x_n

pt $l = 1 \Rightarrow$ NU PUTEM FOLOSI ACEST CRITERIU

Ex 1: Calculați $\lim_n \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{2n+1}$

$E_1)$ $a_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$

$b_n = 2n+1 \Rightarrow b_n \nearrow \infty$

$E_2)$ $\lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{(2n+3)-(2n+1)} =$

$= \lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{2} = \lim_n \frac{1}{2(n+1)} = 0$

$\Rightarrow \lim_n \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{2n+1} = 0$

Ex 2: Calculați $\lim_n \sqrt[n]{3n+1}$

$E_1)$ Fie $x_n = 3n+1 \Rightarrow$

$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_n \frac{3n+4}{3n+1} \xrightarrow{\text{GOP=1}} 1 \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{3n+1} = 1$

Ex 3: Calculați: $\lim_n -\frac{(n+2)!}{3^n}$

$E_1)$ Fie $x_n = -\frac{(n+2)!}{3^n} \Rightarrow$

$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_n \frac{-\frac{(n+3)!}{3^{n+1}}}{-\frac{(n+2)!}{3^n}} =$

$= \lim_n \frac{(n+3)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(n+2)!} =$

$= \lim_n \frac{n+3}{3} \Longrightarrow \infty \in (1;\infty]$

$E_2) \Rightarrow \lim_n -\frac{(n+2)!}{3^n} = \pm\infty$ } $\Rightarrow$

descrescre $-\frac{(n+2)!}{3^n} < 0$ }

$\Rightarrow \lim_n -\frac{(n+2)!}{3^n} = -\infty$