Data:

CLASA A XI-A

SETUL 1
ALGEBRĂ XI

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar 2017-2018

PERMUTĂRI

OPERAȚII ELEMENTARE CU MATRICI

PUTERILE UNEI MATRICI

RELAȚIA LUI CAYLEY-HAMILOTON

DETERMINANȚI: PROPRIETĂȚI, FORMARE DE ZEROURI

RANGUL UENI MATRICE

INVERSA UNEI MATRICE

SISTEME LINIARE

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

~~M2~~

PERMUTĂRI

1) permutare - are două linii, pe prima sunt numere în ordine crescăt. de la 1 la n, pe cea de-a doua aceleași numere în indeferent ce ordine

Obs.: mț permut de ord n se notează S_n și card $S_n = n!$ (nr. de elemente)

Obs 2: ∃ permutarea identică

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

2) inversa unei permutări se notează σ^{-1}, pe prima linie elem. în ordine crescăt iar pe cea de-a doua folosim $\sigma(i) = j \Leftrightarrow \sigma^{-1}(j) = i$

3) compunerea (înmulțirea) permut dacă se cere $\sigma_1 \circ \sigma_2$, folosim că $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(a) = \sigma_1(\sigma_2(a))$, înlocuim $\sigma_2(a)$ cu valoarea corespunzăt, apoi calculăm σ_1 de acea valoare

Obs: o permut NU e comut, e asociat, $\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma$ și $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$

Obs.: la o ecuație punem cu cea de-a doua permutare

4) ec simple cu permutări: se cere x dacă: a) $\sigma_1 \circ x = \sigma_2 \mid \cdot_d \sigma_1^{-1} \Rightarrow x = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$

b) $x \circ \sigma_1 = \sigma_2 \mid \circ_g \sigma_1^{-1} \Rightarrow x = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$

5) numărul de inversiuni: se discută pentru fiecare element din linia a doua, câte după el sunt situate invers (descrescător, adică mai mici) și se adună inversiunile pentru fiecare element, se not $m(\sigma)$

Obs.: dacă $m(\sigma)$ impar ⇒ perm impară

dacă $m(\sigma)$ par ⇒ perm. pară

6) semnul unei permutări

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

Obs 1: $\varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2)$

Obs 2: $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$

7) transpoziții - provin din permut identică prin inversarea a două elemente din linia a doua între ele, se notează $t_{ij} = (i\ j)$ unde i și j sunt elem care se inversează

Obs: $(i\ j)(i\ j) = e$

$(i\ j)^{-1} = (i\ j)$

$(i\ j) = (j\ i)$

Exp 1: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e permutare.

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nu e permutare

Exp 2: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exp 3: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exp 4: $\sigma_1 x = \sigma_2$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

E1) $\sigma_1 x = \sigma_2 \mid \cdot_d \sigma_1^{-1} \Rightarrow x = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$

E2) $\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exp 5: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$m(\sigma) = 3+3+3+2+0 = 11 \Rightarrow \sigma$ perm impară

$\Rightarrow \varepsilon(\sigma) = (-1)^{11} = -1$

Exp 6: în $S_5 \Rightarrow (2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

în $S_7 \Rightarrow (1\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

MATRICI. OPERAȚII CU MATRICI

1) definiție: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ înseamnă că A are m linii, n coloane și elem sunt nr. complexe

Obs 1: a_{ij} este elementul de pe linia i, coloana j

Obs 2: ∃ matrice pătratică (nr. de linii egal cu nr de coloane) și, doar la matricile pătratice ∃ diag pp (\) și diag sec. (/) și urma matricii (suma elem. de pe diag pp) notată $\mathrm{Tr}(A) = t_A$

Obs 3: ∃ matrice unitate I_n care e pătratică cu elem de pe diag pp egale cu 1 iar toate restul egale cu 0

Obs 4: ∃ matrice nulă $O_{m,n}$ care nu e neapărat pătratică dar care are toate elem. egale cu 0

2) operații cu matrici

a) egalitatea: $A = B \Leftrightarrow$ (sunt de același tip și au toate elem. corresp. egale între ele)

b) adunarea, scăderea doar dacă sunt de același tip și se adună, se scad pe fiecare element

c) înmulțirea cu un scalar (număr) se înmulț fiecare element cu acel număr

d) înmulțirea a două matrici - se înmulțește corespunzător fiecare element din prima linie cu fiecare elem din prima coloană, rezultatele se adună și se repetă procedeul

Obs 1: înmulț mătr nu e comutativă, dar e asociativă

e) transpusa unei matrici - inversează liniile cu coloanele

Obs: $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ și $^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

Obs 2: $\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists A \cdot B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$

Exp 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$ și

$a_{21} = 4$ iar $\mathrm{Tr}\, A = 1+5+9 = 15$

Exp 2: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exp 3: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ b) $A+C$ nu există

c) $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

d) $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2\cdot4+3\cdot6+4\cdot1 & 2\cdot5+3\cdot7+4\cdot2 \\ 5\cdot4+1\cdot6+2\cdot1 & 5\cdot5+1\cdot7+2\cdot2 \\ 4\cdot4+0\cdot6+5\cdot1 & 4\cdot5+0\cdot7+5\cdot2 \end{pmatrix}$

$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8+18+4 & 10+21+8 \\ 20+6+2 & 25+7+4 \\ 16+0+5 & 20+0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 39 \\ 28 & 36 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$

f) $C \cdot A$ nu există

g) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3\cdot2+1\cdot5+0\cdot4 & 3\cdot3+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot4+1\cdot2+0\cdot5 \\ 4\cdot2+0\cdot5-1\cdot4 & 4\cdot3+0\cdot1-1\cdot0 & 4\cdot4+0\cdot2-1\cdot5 \\ 2\cdot2+3\cdot5+4\cdot4 & 2\cdot3+3\cdot1+0\cdot4 & 2\cdot4+3\cdot2+4\cdot5 \end{pmatrix}$

h) $^tC = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

i) $^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

DEFINIȚIA PUTERILOR UNEI MATRICI

$A^0 = I_n$ (e greșit $A^0 = 1$)

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ ori}}$

Exp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = ?$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \not\exists$

Obs.: există A^n doar dacă A este pătratică

Exp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = ?$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

CALCULUL VALORILOR UNEI FUNCȚII ÎNTR-O MATRICE

- se înlocuiește x cu A iar termenul liber α se înlocuiește cu $\alpha \cdot I_n$

Ex.: $f(x) = x^2 - 3x + 12$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Se cere $f(A)$

$E_1)\ f(A) = A^2 - 3A + 12 I_2$

$E_2)\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$

$E_3)\ f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

$f(A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

CALCULUL PUTERILOR UNEI MATRICI PRIN INDUCȚIE MATEMATICĂ

E_1) se calculează $A^2, A^3, \ldots$ până observăm regula

E_2) se arată prin inducție rezultatul obținut pt $n \geq 2$

OBS 1: Dacă nu observăm regula, căutăm alte metode (Newton, șiruri sau trigonometrice)

Ex 1.: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se arate A^n

---

E_1) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_2) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_3) Obs. că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 2$

E_4) I $P(2)$: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adevărat

E_5) II Pp. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev

unde $P(k)$: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și

$P(k+1)$: $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3(k+1) \end{pmatrix}$ adică

$P(k+1)$: $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_6) Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow$

$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \cdot A \Rightarrow$

$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1)$ adev

$\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n \geq 2 \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

CALCULAREA PUTERILOR UNEI MATRICI CU AJUTORUL BINOMULUI LUI NEWTON

E_1) se folosește atunci când nu întuim regula, se scrie
$A = I_n + B$ deci $B = A - I_n$

E_2) se calculează $B^2, B^3, B^4, \ldots$ până obținem o putere p cu $B^p = O_n \Rightarrow B^s = O_n, \forall s \geq p$

E_3) se aplică Newton pentru
$A^n = (I_n + B)^n = C_n^0 I_n^n B^0 + C_n^1 I_n^{n-1} B + \ldots + C_n^n I_n^0 B^n$

E_4) se folosește că $I_n^t = I_n, \forall t \in \mathbb{N}$, $B^0 = I_n$ și că $I_n \cdot B^p = B^p$, then

E_5) se adună matricele obținute $\Rightarrow$ forma lui A^n

Obs.: deoarece s-a folosit o formulă nu mai e necesară inducția, însă pentru a fi siguri de rezultat putem demonstra prin inducție rezultatul obținut

---

Ex.: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cere $A^n = ?$, $\forall n \geq 1$

E_1) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_2) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_3) Nu observăm regula pentru A^n, încercăm Newton

$A = I_3 + B \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

E_4) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

E_5) $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$

E_6) $B^3 = O_3 \Rightarrow B^s = O_3, \forall s \geq 3$

E_7) $A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 I_3^n B^0 + C_n^1 I_3^{n-1} B + C_n^2 I_3^{n-2} B^2 + \ldots + C_n^n I_3^0 B^n =$
$= C_n^0 I_3 \cdot I_3 + C_n^1 I_3 B + C_n^2 I_3 B^2 + O_3$

E_8) Cum $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$
$\Rightarrow A^n = 1 \cdot I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & -3n + \frac{4n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 - 7n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

CALCULAREA PUTERILOR UNEI MATRICI CU AJUTORUL ȘIRURILOR (*)(*)

E_1) se calculează $A^2, A^3, \ldots$ și la elementele la care se observă regula scriem elementele cu acea regulă, la celelalte notăm $a_n, b_n, \ldots$

E_2) avem forma lui A^n cu unele elemente sub formă de $a_n, b_n, \ldots$ apoi scriem A^{n+1} sub aceeași formă cu unele elemente $a_{n+1}, b_{n+1}, \ldots$

E_3) calculăm $A^{n+1} = A^n \cdot A$ și egalând corespunzător elementele lui A^{n+1} din cele 2 relații obținem o recurență între șirurile a_n, b_n

E_4) deducem forma lui a_n, b_n și deducem A^n, apoi arătăm prin inducție matematică rezultatul obținut

---

Exemplu: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cere $A^n = ?$, $n \geq 1$

E_1) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_2) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_3) Obs. că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

cu $a_1 = -5$, $a_2 = -6$, $a_3 = -3$

deci ne întoarcem forma lui a_n

E_4) din $A^n \Rightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & a_{n+1} \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_5) $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & -5+4n+a_n \\ 0 & 1 & 2n+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_6) egalând corespunzător elementele

$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + 4n - 5$, $\forall n \geq 1$

$\not n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 4 \cdot 1 - 5$

$\not n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 4 \cdot 2 - 5$

$\not n = n-1 \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 4(n-1) - 5$

"+": $a_n = a_1 + 4(1 + 2 + \ldots + (n-1)) - 5(n-1)$

$\Rightarrow a_n = -5 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - 5n + 5$

$a_n = 2n^2 - 2n - 5n = 2n^2 - 7n$

E_7) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 - 7n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ind.

I P(2): $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ adev.

II Pp. $A^k = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$, arăt $A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

Din $A^k = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \mid \cdot A \Rightarrow A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} A$

și ieșe din calcul

(*) (*)

CALCULAREA PUTERILOR UNEI MATRICI FOLOSIND TRIGONOMETRIA

E1) Se dă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ și se scrie sub forma

$A=\alpha\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ sau

$A=\alpha\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Obs: dacă nu observăm α, se ia $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$

E2) se arată prin inducție în caz general (adică pt φ și α)

$A^n=\alpha^n\begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$ respectiv

$A^n=\alpha^n\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

E3) se înlocuiește α și φ.

Exp1: Fie $A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, se cere $A^n=?$ pt $n\geq 2$

E1) $A=2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\Rightarrow$

$A=2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\Rightarrow$

A are forma $A=\alpha\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

E2) arătăm că

$A^n=\alpha^n\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$, $n\geq 2$

E3) I $P(2)$: $A^2=\alpha^2\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$

$A^2=A\cdot A=\alpha\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$=\alpha^2\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi & -\sin\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$

$=\alpha^2\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}\Rightarrow P(2)$ adev.

E4) II $\forall n$, $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev.

unde $P(k)$: $A^k=2^k\begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}$

$P(k+1)$: $A^{k+1}=2^{k+1}\begin{pmatrix} \cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi \\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi \end{pmatrix}$

E5) Știm $P(k)$ adev $\Rightarrow$

$A^k=2^k\begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}\Big|\cdot A$

$\Rightarrow A^{k+1}=2^k\begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}2\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$=2^{k+1}\begin{pmatrix} \cos k\varphi\cos\varphi-\sin k\varphi\sin\varphi & -\cos k\varphi\sin\varphi-\sin k\varphi\cos\varphi \\ \sin k\varphi\cos\varphi+\cos k\varphi\sin\varphi & -\sin k\varphi\sin\varphi+\cos k\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$

$=2^{k+1}\begin{pmatrix} \cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi \\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi \end{pmatrix}\Rightarrow$

$P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n\geq 2$

E6) pt $\alpha=2$ și $\varphi=\frac{\pi}{6}\Rightarrow$

$A^n=2^n\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$, $n\geq 2$

RELAȚIA LUI CAYLEY-HAMILTON PENTRU MATRICI DE ORD II

(*) (*)

E_1) pentru orice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ notăm $\det A = ad-bc$ (determinant)

$I_1 A = t = a+d$ (urma)

E_2) $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ avem:

$$\boxed{A^2 - t\cdot A + (\det A)\cdot I_2 = O_2}$$

Obs1: se folosește dacă $t=a+d=0$ sau dacă $\det A = 0$

Obs2: dacă $\det A = 0$ se deduce $A^n = t^{n-1}\cdot A$

Ex1: Rezolvați ecuația $X^4 = A$ unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și $A=\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

E_1) $X^4 = A \mid \det(\dots) \Rightarrow$

$\det(X^4) = \det A \Rightarrow (\det X)^4 = \det A$

E_2) dar, $\det A = 9\cdot 7 - 9\cdot 7 = 0$

$\Rightarrow (\det X)^4 = 0 \Rightarrow \det X = 0$

E_3) $\Rightarrow X^4 = t^3 \cdot X$

E_4) notând $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ ecuația este

$X^4 = A \Leftrightarrow t^3 X = A \Leftrightarrow$

$(a+d)^3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} (a+d)^3 a & (a+d)^3 b \\ (a+d)^3 c & (a+d)^3 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

E_5) Trecând la urmă în această relație $\Rightarrow$

$(a+d)^3 a + (a+d)^3 d = 9+7$

$\Rightarrow (a+d)^3 (a+d) = 16 \Rightarrow$

$(a+d)^4 = 16 \Rightarrow a+d = \pm 2$

E_6) Caz I: $a+d=2 \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 8a & 8b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=b=\frac{9}{8} \\ c=d=\frac{7}{8} \end{cases}$

E_7) Caz II: $a+d=-2 \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} -8a & -8b \\ -8c & -8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=b=-\frac{9}{8} \\ c=d=-\frac{7}{8} \end{cases}$

DETERMINANȚI

1) există doar pt matrici pătratice și au ca valoare un număr

2) elementele se notează între bară și nu între paranteze rotunde ca la matrici

3) de ord I: $A=(a) \Rightarrow \det A=|a|=a$

de ord II: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

de ord III: $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ — regula triunghiului

$=aei+bfg+dhc-ceg-dbi-hfa$

4) minorul elementului a_{ij} - este determinantul obținut prin tăierea liniei i și a coloanei j, se not m_{ij}

5) complementul algebric pt a_{ij} este egal cu $(-1)^{i+j}\cdot$(minorul corespunzător)

6) calcularea determ prin dezvolt după elem unei linii (sau coloane)

$\det A=\sum (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot m_{ij}$

Obs.: dezvoltarea după elem unei linii sau coloane e utilă la determ de ordin ≥ 4

Exp 1: $A=(-3) \Rightarrow \det A=|-3|=-3$

Exp 2: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=$

$=2\cdot 1-4\cdot 3=2-12=-10$

Exp 3: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$

$=2\cdot 2\cdot 5+3\cdot 1\cdot 3+1\cdot 2\cdot 4-3\cdot 2\cdot 4-1\cdot 3\cdot 5-2\cdot 1\cdot 2=$

$=20+9+8-24-15-4=$

$=37-43=-6$

Exp 4: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

minorul pt a_{23} este $m_{2,3}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=$

$=8-9=-1$

compl alg. pentru a_{23} este

$A_{2,3}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1\cdot(8-9)=1$

Exp 5: Calculați $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

E_1) Alegem o linie după care îl dezvoltăm, fie cea linie linia 3

E_2) $\det A \overset{l_3}{=}(-1)^{3+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}+$

$+(-1)^{3+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}+$

$+(-1)^{3+4}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ și fiecare determinant de ord III se calculează

PROPRIETĂȚI ALE DETERMINANȚILOR

- sunt valabile pentru determinanți de ordinul n, însă ca exemple vom da doar pt ordinul 3

P1 $\det A = \det({}^tA)$, deci toate prop valabile pt linii sunt adev. și pt. coloane

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

P2 dacă o linie (sau coloană) e formată doar din zerouri $\Rightarrow$ $\det A = 0$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_3=0}{=\!=} 0$

P3 dacă din A schimbăm 2 linii între ele (sau 2 coloane între ele) obținem A' cu $\det A' = -\det A$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=\!=} - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

P4 dacă 2 linii sunt identice (sau 2 coloane ident.) $\Rightarrow \det A = 0$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{L_2=L_3}{=\!=} 0$

P5 dacă o linie e înmulțită cu α (sau o coloană cu α) se poate scoate factor comun $\Rightarrow \det A' = \alpha \cdot \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

P6 dacă toate elementele sunt înmulțite cu $\alpha \Rightarrow$ avem A' cu $\det A' = \alpha^n \cdot \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5d & 5e & 5f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = 5^3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

P7 se pot aduna toate celelalte linii la una fixată (sau toate celelalte coloane la una fixată) $\Rightarrow$ obținem A' cu $\det A' = \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

P8 dacă înmulțim o linie cu α și adunăm la altă linie (sau o coloană cu α și adunăm la altă coloană) $\Rightarrow A'$ cu $\det A' = \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{C_1+\alpha C_2 = C_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+\alpha b & b & c \\ d+\alpha e & e & f \\ g+\alpha h & h & i \end{vmatrix}$

P9 doi determinanți se pot aduna doar dacă au toate liniile identice, cu excepția uneia, se copiază cele identice și se adună corespunzătoare diferite

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+m & h+n & i+p \end{vmatrix}$

P10 dacă A, B pătratice $\Rightarrow$

$\det(A^n) = (\det A)^n$ și

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

FORMARE DE ZEROURI

E_1) aleg un element egal cu 1 (sau element egal cu -1) pe care îl numim pivot și vom forma zerouri pe linia ce conține pivotul (numită linie de pivotare)

E_2) coloana ce conține pivotul se numește coloană de pivotare

E_3) pentru a forma zerouri pe linia de pivotare, din fiecare coloană diferită de coloana de pivotare vom scădea sau adiuna coloana de pivotare înmulțită cu un număr corespunzător

E_4) se va folosi formula $\det A = (-1)^{l+c} \cdot (\text{pivot}) \cdot (\text{determinantul rămas prin tăierea liniei „l" și a coloanei „c"})$

Exp 1: calculați prin formare de zerouri $\det A$ pentru

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

E_1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & \boxed{1} \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1 - 5c_3 \to c_1 \\ c_2 - 2c_3 \to c_2 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2-20 & 3-8 & 4 \\ 5-5 & 2-2 & 1 \\ 0-15 & 2-6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -18 & -5 \\ -15 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (72 - 75) = -1 \cdot (-3) = 3$$

Obs.: rezultatele de la coloana 1, respectiv coloana 2 se puteau scrie direct ca în exemplul următor

Exp 2: calculați $\det A$ pt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

E_1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ \boxed{1} & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2 - 3c_1 \to c_2 \\ c_3 + 2c_1 \to c_3 \\ c_4 - 5c_1 \to c_4 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & -8 \\ 4 & -9 & 10 & -18 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -13 & 10 & -23 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 & 8 \\ -9 & 10 & -18 \\ -13 & 10 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-690 - 720 + 1872 + 1040 - 540 + 1656) =$$

$$= 2618$$

Obs.: pt determinanți de ordin superior (≥ 3), nu există formulă directă

GĂSIREA REZULTATULUI SUB FORMĂ DE PRODUS AL UNUI DETERMINANT

- se formează zerouri, se dă factor comun

Exp. 1 calculați, sub formă de produs,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = ?$$

$E_1)$ $\det A \xrightarrow[C_3 - C_1 \to C_3]{C_2 - C_1 \to C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$

$E_2)$ $\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$

$E_3)$ $\det A = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$

$E_4)$ $\det A = (b-a)(c-a)\left(c^2+ca+a^2-b^2-ba-a^2\right)$

$\det A = (b-a)(c-a)\left((c-b)(c+b)+a(c-b)\right)$

$\det A = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$

DETERM. VANDERMONDE

- dacă nu se reține, se deduce prin formare de zerouri

TIP I: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a$

TIP II: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

TIP III: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

- ca și structură, ↑ determinant VANDERMONDE are pe prima linie 1, apoi variabile la puterea I, apoi aceleași variabile la puterea a 2-a, ...
- ca rezultat, din necunoscuta 2 și scade nr 1, din nr 3 se scade nr 1, ---, apoi din 3 se scade 2, - - - - .

(M2) RANGUL UNEI MATRICE (*)

E_1) dacă A pătratică cu n linii și $\det A \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = n$

E_2) dacă A nu e pătratică sau dacă A pătratică cu $\det A = 0$, găsim un minor de ord I nenul (de obicei cel din stg sus) și în acest caz $\operatorname{rang} A \geq 1$ (dacă toate elementele lui A sunt $0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 0$)

E_3) dacă $\operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm minorul nenul anterior și obținem minori de ord II

E_4) dacă toți minorii de ord II obținuți sunt nuli $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 1$, dacă există un minor de ord II nenul $\Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$

E_5) dacă $\operatorname{rang} A \geq 2$, bordăm minorul nenul anterior și obținem minori de ord III

E_6) dacă toți minorii de ord III obținuți prin bordare sunt nuli $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, dacă există un minor de ord III nenul $\Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 3$

E_7) dacă $\operatorname{rang} A \geq 3$, bordăm minorul nenul anterior și obținem minori de ord IV

Obs.: Procedeul continuă sau până când toți minorii de un anumit ordin sunt nuli, sau până când nu mai putem borda

Obs 2.: $\operatorname{rang} A \leq \min(\text{nr liniii, nr. coloane})$

Obs 3: minorul cu care începem nu e obligatoriu să fie de ord I, poate avea orice ordin dar trebuie să fie nenul

---

Ex 1: $\operatorname{rang} A = ?$, pt $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E_1) A pătratică, $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 0 + 60 + 2 - 28 - 9 - 0 =$

$= 62 - 37 = 25 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$

Ex 2.: $A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ \boxed{4} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se cere $\operatorname{rang} A$

E_1) A pătratică,

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 40 + 6 - 40 - 6 - 0 =$

$= 46 - 46 = 0$

E_2) $|3| = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, îl bordăm

E_3) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 = -17 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, îl bordăm

E_4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 40 + 6 - 40 - 6 - 0 =$

$= 46 - 46 = 0$

E_5) Fără alt minor de ord III obținut prin bordare $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

Ex 3.: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = ?$

E_1) A nu e pătratică

E_2) $|-2| = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, îl bordăm $\Rightarrow$

E_3) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9 \neq 0 \Rightarrow$

$\operatorname{rang} A \geq 2$

E_4) Cum $A \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A \leq \min(2, 4) \Rightarrow \operatorname{rang} A \leq 2$

E_5) Din $\left.\begin{matrix} \operatorname{rang} A \geq 2 \\ \operatorname{rang} A \leq 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

INVERSA UNEI MATRICI

DEFINIȚIE: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dacă $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu

$$\begin{cases} A \cdot B = I_n \text{ și} \\ B \cdot A = I_n \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ inversabilă și $A^{-1} = B$

Obs: pentru a arăta că A e inversabilă sunt 2 metode

met I: arăt. că $\det A \neq 0$

met II: arăt. că $\exists B$ cu $\begin{cases} A \cdot B = I_n \\ B \cdot A = I_n \end{cases}$

Obs: o matrice ce admite inversă se numește **NESINGULARĂ**

CALCUL INVERSEI UNEI MATRICI

E_1) calculăm $\det A$

E_2) dacă $\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1} \Rightarrow$ STOP

dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow E_3$)

E_3) calc. ${}^tA$

E_4) calc. din ${}^tA$ pe A^* (matricea adjunctă) unde a^*_{ij} este complementul algebric pt element respectiv, $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ (determinantul obținut prin tăierea liniei i, coloanei j)

E_5) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

Ex 1: Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A^5 = I_n$, arătați că A inversabilă și calculați inversa sa

E_1) $A^5 = I_n \Rightarrow \begin{cases} A \cdot A^4 = I_n \\ A^4 \cdot A = I_n \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ inversabilă și $A^{-1} = A^4$

Ex 2: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

E_1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 2 + 3 - 0 = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

E_2) ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

E_3) $A^* = ?$

$a^*_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$

$a^*_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 + 2) = -2$

$a^*_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$

$a^*_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 = -2$

$a^*_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$

$a^*_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 = -3$

$a^*_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$a^*_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

$a^*_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

E_4) $A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

E_5) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \Rightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(M2) STUDIEREA COMPATIBILITĂȚII UNUI SISTEM (*)

T. KRONECKER-CAPELLI: Un sist. e compatibil $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$ unde $\bar{A}$ este matricea extinsă, formată din A prin bordare cu coloana termenilor liberi

Obs: deoarece $\bar{A}$ conține toate elem. lui $A \Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} \geq \operatorname{rang} A$ și când vom calcula $\operatorname{rang}\bar{A}$, vom porni direct cu minorul ce a dat $\operatorname{rang} A$ și vom borda doar cu elem din col. term. liberi

- dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ COMPATIBIL, altfel

T. ROUCHE: Un sistem este compatibil $\Leftrightarrow$

[(toți minorii caracteristici sunt nuli) sau (nu există minori caracteristici)

unde Δ_c = minor caracteristic e format din Δ_p (minor principal) bordat cu câte una din liniile rămase și elem. corespunz din coloana termenilor liberi)]

- dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ COMPAT, altfel

---

Exp: Studiați compatibilitatea sist.

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+2y-2z=5 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

met I: studiem dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\bar{A}$

E_1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

E_2) $\operatorname{rang} A = ?$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2+2+2-2-2=0$

E_3) $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+2=0$,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, bordăm

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

E_4) $\operatorname{rang}\bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$,

bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+5-6-6+5-2 = 10-12 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} \geq 3$, și cum $\bar{A} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} \leq 3 \Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} = 3$

E_5) $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang}\bar{A} = 3 \Rightarrow \operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}\bar{A}$

$\Rightarrow$ sist incompatibil

met II: calc. Δ_p și studiem ce se întâmplă cu Δ_c

E_1) $\operatorname{rang} A = ?$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

E_2) $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm $\Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+2=0$,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\exists$ altă bordare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

E_3) singurul $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow \exists \Delta_c \neq 0 \Rightarrow$ sist incompatibil

Exp 2: Studiați compatibilitatea pt

$$\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+y-2z+t=2 \end{cases}$$

met I: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\operatorname{rang} A = ?$, $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, cum

$A \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{C}) \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

$\operatorname{rang}\bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ și cum

$\bar{A} \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{C}) \Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} = 2 \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\bar{A}$

$\Rightarrow$ sist compatibil

met II: ca mai sus, $\operatorname{rang} A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

și $\nexists \Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil

Obs: Un sistem care nu e compatibil se numește INCOMPATIBIL

REZOLVAREA SISTEMELOR PRIN REGULA LUI CRAMER

– dacă A pătratică cu $\det A \neq 0$ se poate aplica regula lui CRAMER

E_1) $\det A = \ldots$ și dacă $\det A = 0 \Rightarrow$ nu se poate folosi Cramer

dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow E_2$)

E_2) se calculează Δ_x obținut din $\det A$ prin înlocuirea coloanei lui x cu a termenilor liberi, analog Δ_y din $\det A$ prin înlocuirea coloanei lui y cu a termenilor liberi, etc

E_3) se folosesc formulele: $x = \frac{\Delta_x}{\det A}$, $y = \frac{\Delta_y}{\det A}$, $z = \frac{\Delta_z}{\det A}$

Ex: $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$

E_1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 4 - 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0$

deci se poate aplica Cramer

E_2) $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 5 + 14 - 5 - 8 - 7 = 14 - 29 = -15$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 4 + 10 - 7 - 5 + 8 = 22 - 19 = 3$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 7 + 16 - 4 - 14 + 10 = 26 - 20 = 6$

E_3) $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{-15}{-3} = 5$; $y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{3}{-3} = -1$; $z = \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{6}{-3} = -2$

Obs.: Condiția ca un sistem să aibă soluție unică (compat. determinat) este ca A pătratică cu $\det A \neq 0$

(M2) REZOLVAREA SISTEMELOR ÎN CAZ GENERAL ⊛

E_1) dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ regula lui Cramer
(dacă A pătratică cu $\det A = 0$) sau (A nu e pătratică), studiem compatibilitatea sistemului (vezi E_2)) și dacă sist e INCOMPATIBIL $\Rightarrow$ STOP, dacă e compatibil continuăm rezolvarea

E_2) pt compatibilitate $\Rightarrow$ 2 metode
met I: dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist compatibil
dacă $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist incompatibil
met II: dacă toți $\Delta_c = 0$ sau $\nexists \Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil
dacă $\exists \Delta_c \neq 0 \Rightarrow$ sist incompatibil

E_3) se formează sist principal format din ec. ce intră în Δ_p, necunoscutele care nu intră în Δ_p se trec în dreapta, se notează cu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, se numesc nec. secundare

E_4) se rezolvă prin orice metodă (reducere substituție, Cramer) sist. principal obținut

Obs: • sist compat determinat (cu soluție unică) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (se rezolvă cu Cramer)
• sist compat. nedeterminat (sistem cu o inf de soluții) $\Leftrightarrow$ apar parametri $(\alpha, \beta, \ldots)$
• sist simplu nedeterminat, apare $\alpha \Leftrightarrow$ (nr. necun.) $-$ (nr. de linii pt Δ_p) $= 1$
• sist dublu nedeterminat, apar $\alpha, \beta \Leftrightarrow$ (nr. necun.) $-$ (nr. de linii pt Δ_p) $= 2$

Ex 1.: $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 4x - 2y + 2z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$, rezolvați

E_1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 4 + 2 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ nu putem aplica Cramer

E_2) $\operatorname{rang} A = ?$, $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm
$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$
$\Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

E_3) $\operatorname{rang} \bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, bordăm cu col. term. liberi $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ și e singura modalitate de bordare cu col. term liberi $\Rightarrow \operatorname{rang} \bar{A} = 2 \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist compatibil

E_4) sist pp. este $\begin{cases} 2x - y = 4 - \alpha \\ x + y = 1 + \alpha \end{cases}$ unde $z = \alpha$

E_5) adunăm ec $\Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$, înlocuim
$\Rightarrow y = 1 + \alpha - \frac{5}{3} = \alpha - \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 5/3 \\ y = \alpha - 2/3 \\ z = \alpha \end{cases}$
și e simplu nedeterminat

Ex 2: $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 4x + 2y - 2z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$

E_1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 4 + 2 - 4 - 4 = 0$
$\Rightarrow$ nu putem aplica Cramer

E_2) $\operatorname{rang} A = ?$, se arată că $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$
$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

E_3) $\operatorname{rang} \bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, bordăm
$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 1 - 8 - 4 + 2 + 4 = -9 \neq 0$
$\Rightarrow \operatorname{rang} \bar{A} = 3 \neq \operatorname{rang} A \Rightarrow$ INCOMPATIBIL

Ex 3.: $\begin{cases} 2x - y + z + 3t = 5 \\ x + y + 2z \quad = 1 \\ 3x + y + 4z + 2t = 5 \end{cases}$

E_1) A nu e pătratică, nu pot folosi Cramer
E_2) $\operatorname{rang} A = ?$, $|2| = 2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$,
$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\nexists$ alt minor
alt mod bordare $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$
E_3) $\operatorname{rang} \bar{A} = ?$, bordăm $\Delta_p \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$,
$\nexists$ alte bordare $\Rightarrow \operatorname{rang} \bar{A} = 2 \Rightarrow$ compatibil
E_4) sist pp. $\begin{cases} 2x - y = 5 - \alpha - 3\beta \\ x + y = 1 - 2\alpha \end{cases}$, $z = \alpha$, $t = \beta$

E_5) „+": $3x = 6 - 3\alpha - 3\beta \Rightarrow x = 2 - \alpha - \beta$
$y = 1 - 2\alpha - x = 1 - 2\alpha - 2 + \alpha + \beta = -1 - \alpha + \beta$

E_6) $\begin{cases} x = 2 - \alpha - \beta \\ y = -1 - \alpha + \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$ sist compatibil dublu nedeterminat

(M2) # SISTEME LINIARE OMOGENE

– sunt sisteme liniare (toate necunoscutele apar la puterea I) la care coloana termenilor liberi este formată doar din zerouri

Obs1: Un sistem liniar omogen e întotdeauna compatibil deoarece are întotdeauna soluția banală (soluția nulă) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Obs2: Dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ se poate rezolva cu CRAMER și $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \dots \Rightarrow x = y = z = \dots = 0$

Așadar, pt ca S să aibă doar soluția banală trebuie ca A pătratică cu $\det A \neq 0$

Obs3: Pt ca S să aibă și alte soluții diferite de soluția banală, sau A nu e pătratică sau A pătratică cu $\det A = 0$

Ex: $\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$, $m = ?$ a.î. S are doar soluția nulă

E1) A pătratică, ar trebui ca $\det A \neq 0$

E2) $\det A = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 3 - 1 - 3 - m + 2 = m + 1$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$