GEOMETRIE CU COORDONATE.
PROBLEME NONSTANDARD

1) Fie $A(2;4)$, $B(1;-1)$, $C(4;1)$, se cere ec dreptei d dacă $\forall M \in d$ avem $MB^2+MC^2=2MA^2$

2) Găsiți ec lui d_1 dacă punctul $P(-1;1) \in d_1$ și $d_1 \parallel d_2$ unde $d_2: 2x+ay-9=0$ și $Q(4;-1) \in d_2$

3) Fie $A(3a,0)$, $B(3a,b)$, $C(a,b)$, $P(a,b)$, $Q(2a,b)$ cu $a,b>0$. Dacă $OP \cap AQ = R$, se cere relația între a și b cu ΔBRC echilateral

4) Fie $AB: x+y+1=0$, $AC: 2x-y-2=0$ și $MN: -x+2y+2=0$, se cere $A_{\Delta ABC}$ dacă M mijl AB și N mijl lui AC

5) Fie P_1 proiecția lui $P(3;1)$ pe $d_1: 2x-3y+6=0$, prin P ducem d_2 ce face cu Ox un $\sphericalangle$ de 45°, se cere $dist(P, d_2)$

6) În ΔABC, $A(3,4)$, $B(1,1)$, $C(4,2)$ și $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ cu $\frac{AP}{PB}=2$, $\frac{AQ}{QC}=3$ Se cer coord lui $\{M\} = BC \cap PQ$

7) Fie $A(1;-2)$, $B(1,3)$, se cere $a=?$ dacă $P(2,a)$ este pe bisectoarea $\hat{AOB}$

8) Prin simetricul lui $A(1;2)$ față de $B(3;4)$, notat C, se duce d care $\cap Ox$ în P. Se cere m_d cu $A_{APC}=4$

9) Fie $A(4;1)$, $B(1;3)$ și d ce trece prin O, se cere m_d dacă $\forall P \in d$ avem $PA^2-PB^2=OA^2-OB^2$

10) Fie $d_1: x+y-2=0$, $d_2: 2x-y-4=0$, $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ și fie $d \parallel b_1$, $A \in d$ și $P \in d$, $P \neq A$. Arătați că raportul distanțelor de la P la d_1, respectiv d_2 e constant și găsiți acel raport

11) Găsiți coord lui $P \in AB$, cel mai aproape de O dacă $A(a,0)$, $B(0,b)$

12) Simetrica dreptei $d: y=2-x$ față de $A(2;-3)$ intersectează axele în P și Q, se cere A_{POQ}

13) Fie $A(1,0)$, $C(3,1)$, $ABCD$ pătrat, se cer coord lui B și D

14) Fie $d_1: x+2y-9=0$, $d_2: x-2y+3=0$, $d_3: 2x+ay-3=0$, știm d_1, d_2 și d_3 concurente și $O \in d$, $d \cap d_1, d_2$ și d_3 în A, B, C. Se cere m_d dacă $AB \equiv BC$

15) Fie $A(4;0)$, $B(0,2)$ și M, N proiectile lui P mijl lui AB pe Ox, respectiv pe Oy. Dacă Q este pct de $\cap$ dintre perpend în B pe AB cu MP și R pct de $\cap$ al perpend în A pe AB cu NP, se cere A_{ABQR}

16) Se cere $\sphericalangle$ dintre diag AC și BD ale paralelogr. $ABCD$ dacă $A(2,1)$, $B(3,-1)$, $C(4,3)$

Fie $A(2;4)$, $B(1;-1)$, $C(4;1)$. Se cere ec. dreptei d dacă $\forall M \in d$ avem

$$MB^2 + MC^2 = 2MA^2$$

E_1) Fie $M(\alpha, \beta) \Rightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ devine

$$\left[(1-\alpha)^2 + (-1-\beta)^2\right] + \left[(4-\alpha)^2 + (1-\beta)^2\right] = 2\left[(2-\alpha)^2 + (4-\beta)^2\right]$$

E_2) $1 - 2\alpha + \alpha^2 + 1 + 2\beta + \beta^2 + 16 - 8\alpha + \alpha^2 + 1 - 2\beta + \beta^2 =$

$$= 2(4 - 4\alpha + \alpha^2 + 16 - 8\beta + \beta^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 10\alpha + 19 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 8\alpha - 16\beta + 40$$

$$\Rightarrow -2\alpha + 16\beta - 21 = 0 \mid \cdot(-1)$$

$$2\alpha - 16\beta + 21 = 0$$

E_3) Deci, coord lui M verifică ec. dreptei

$$2x - 16y + 21 = 0$$

TG
72

Scrieți ec. lui d_1 dacă $P(-1,1) \in d_1$ și $d_1 \parallel d_2$ unde $d_2: 2x+9y-9=0$ și $Q(4,-1) \in d_2$

$E_1)$ $Q(4,-1) \in d_2 \Rightarrow 2\cdot 4 + 9\cdot(-1) - 9 = 0$

$\Rightarrow 8 - 9 - a = 0 \Rightarrow -1 - a = 0 \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow d_2: 2x - y - 9 = 0$

$E_2)$ $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$

$m_{d_2} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-1} = 2$ $\Big\} \Rightarrow m_{d_1} = 2$

$E_3)$ știm $P(-1,1) \in d_1$, $m_{d_1} = 2$ $\Rightarrow$ folosim $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 1 = 2(x+1) \Rightarrow y - 1 = 2x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - y + 3 = 0$

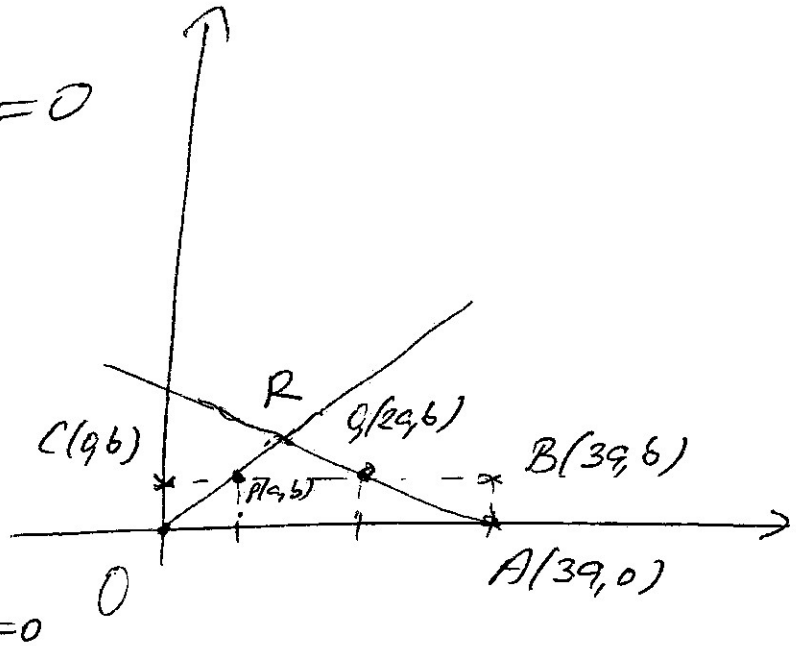
TG 74

Fie $A(3a,0)$, $B(3a,b)$, $C(0,b)$, $P(a,b)$, $Q(2a,b)$ cu $a,b>0$. Dacă $OP \cap AQ = R$, să se relaționeze între a și b dacă ΔBRC echilateral

---

E_1) ec. OP: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$



$\Rightarrow 0 + ay + 0 - 0 - bx - 0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{bx - ay = 0}$

E_2) ec. AQ: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3a & 0 & 1 \\ 2a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 + 2ay + 3ab - 0 - bx - 3ay = 0$

$\Rightarrow \boxed{-bx - ay + 3ab = 0}$

E_3) Să găsim $R \Rightarrow$ sistem $\begin{cases} bx - ay = 0 \\ -bx - ay + 3ab = 0 \end{cases}$

$+\,+$: $-2ay = -3ab \Rightarrow y = \frac{3b}{2}$

$\Rightarrow bx - a \cdot \frac{3b}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{2} \Rightarrow R\left(\frac{3a}{2}; \frac{3b}{2}\right)$

E_4) ΔBRC echilat $\Rightarrow BR \equiv RC \equiv BC \Leftrightarrow BR^2 = RC^2 = BC^2$

E_5) $RC^2 = BC^2 \Rightarrow \left(0 - \frac{3a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3b}{2}\right)^2 = (0-3a)^2 + (b-b)^2$

$\Rightarrow \frac{9a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 9a^2 \mid \cdot 4 \Rightarrow 9a^2 + b^2 = 36a^2 \Rightarrow b^2 = 27a^2 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}a$

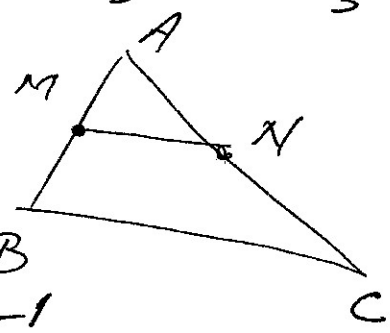
E_6) Ar trebui verif. și că $RC^2 = BR^2$ care iese $\Rightarrow \boxed{b = 3\sqrt{3}a}$

Fie $AB: x+y+1=0$, $AC: 2x-y-2=0$ și $MN: -x+2y+2=0$. Se cere aria $\triangle ABC$ dacă M este mijl lui AB și N mijl AC

$E_1)\ AB \cap AC = \{A\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$

$4+$: $3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=-\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \boxed{A\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)}$



$E_2)\ AB \cap MN = \{M\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ -x+2y+2=0 \end{cases}$

$4+4$ $\quad 3y+3=0 \Rightarrow y=-1$

înlocuim $\Rightarrow x=0 \Rightarrow M(0;-1)$

$E_3)\ AC \cap MN = \{N\} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ -x+2y+2=0 \end{cases} \Big| \cdot 2$

$4+$: $3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$, înlocuim $\Rightarrow$

$\frac{4}{3}-y-2=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

$E_4)$ M mijl AB $\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow 0 = \frac{\frac{1}{3}+x_B}{2} \Rightarrow x_B = -\frac{1}{3} \\ y_M = \frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-\frac{4}{3}+y_B}{2} \Rightarrow y_B = \frac{-2}{3} \end{cases}$

$\boxed{B\left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)}$

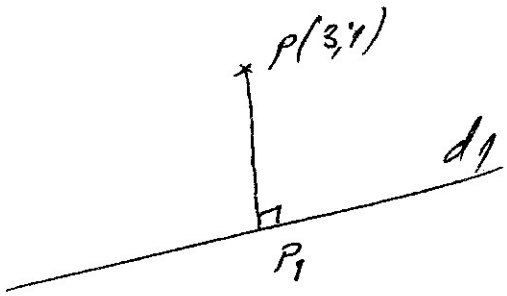
$E_5)$ N mijl AC $\Rightarrow \begin{cases} x_N = \frac{x_A+x_C}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{3}+x_C}{2} \Rightarrow x_C = 1 \\ y_N = \frac{y_A+y_C}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{-\frac{4}{3}+y_C}{2} \Rightarrow y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(1;0)}$

$E_6)\ A = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{4}{3} + 0 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - 0$

$= -\frac{6}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

$E_7)\ A = \frac{1}{2}\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Fie P_1 proiecția lui $P(3;1)$ pe $d_1: 2x-3y+6=0$, prin P_1 se duce d_2 ce face cu Ox un $\measuredangle$ de $45°$, se cere $dist(P, d_2)$ 7G 77



$E_1)$ $PP_1 \perp d_1 \Rightarrow m_{PP_1} \cdot m_{d_1} = -1$

$E_2)$ $m_{d_1} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{PP_1} = -\frac{3}{2}$

$E_3)$ stiem $P(3;1)$, $m_{PP_1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow PP_1: y-1 = -\frac{3}{2}(x-3)$

$\Rightarrow 2y-2 = -3x+9 \Rightarrow 3x+2y-11=0$

$E_4)$ $PP_1 \cap d_1 = \{P_1\} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=11 \\ 2x-3y=-6 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$

$13x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{13}$

Înlor $\Rightarrow \frac{42}{13} - 3y = -6 \Rightarrow -3y = -6 - \frac{42}{13}$

$\Rightarrow -3y = -\frac{120}{13} \Rightarrow y = \frac{120}{39} = \frac{40}{13} \Rightarrow P_1\left(\frac{21}{13}; \frac{40}{13}\right)$

$E_5)$ $m_{d_2} = tg\, \alpha = tg\, 45° = 1$, $P_1\left(\frac{21}{13}; \frac{40}{13}\right) \Rightarrow$ ec. d_2 este

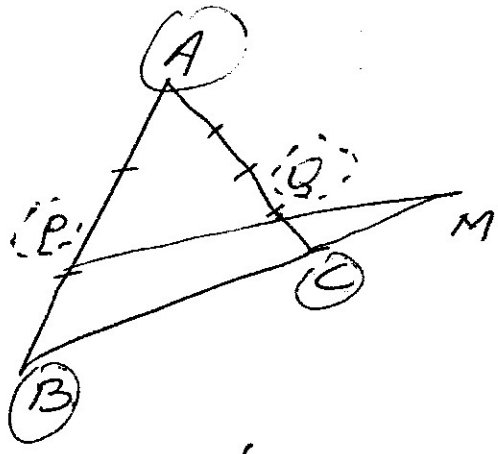
$$y - \frac{40}{13} = 1\left(x - \frac{21}{13}\right) \mid \cdot 13$$

$\Rightarrow 13y - 40 = 13x - 21 \Rightarrow 13x - 13y + 19 = 0$

$E_6)$ $dist(P, d_2) = \frac{|13 \cdot 3 - 13 \cdot 1 + 19|}{\sqrt{13^2+13^2}} = \frac{45}{13\sqrt{2}} = \frac{45\sqrt{2}}{26}$

TG 78

ΔABC cu $A(2;4)$, $B(1;1)$, $C(4;2)$ și $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ cu $\frac{AP}{PB}=2$, $\frac{AQ}{QC}=3$. Se cer coord pct. de $\cap$ dintre BC și PQ



$E_1)$ $\frac{AP}{PB}=2$, folosim

$$\begin{cases} x_P = \frac{1}{1+k}x_A + \frac{k}{1+k}x_B \\ y_P = \frac{1}{1+k}y_A + \frac{k}{1+k}y_B \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_P = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 1 \Rightarrow x_P = \frac{4}{3} \\ y_P = \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{2}{3}\cdot 1 \Rightarrow y_P = 2 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3};2\right)$$

$E_2)$ Analog, $x_Q = \frac{1}{1+3}\cdot 2 + \frac{3}{1+3}\cdot 4 \rightarrow x_Q = \frac{7}{2}$

$$y_Q = \frac{1}{1+3}\cdot 4 + \frac{3}{1+3}\cdot 2 \Rightarrow y_Q = \frac{5}{2}$$

$\rightarrow Q\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$

$E_3)$ ec. PQ: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4/3 & 2 & 1 \\ 7/2 & 5/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 2x + \frac{20}{6} + \frac{7y}{2} - 7 - \frac{5}{2}x - \frac{4}{3}y = 0 \mid \cdot 6$$

$$12x + 20 + 21y - 42 - 15x - 8y = 0$$

$$-3x + 13y - 22 = 0 \mid \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow 3x - 13y + 22 = 0$$

$E_4)$ analog BC cu determinant $\Rightarrow BC: x - 3y + 2 = 0$

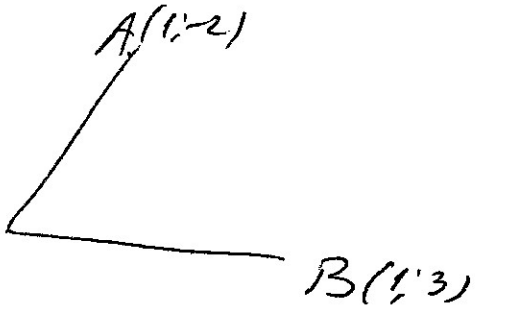
$E_5)$ $BC \cap PQ \Rightarrow \begin{cases} 3x - 13y = -22 \\ x - 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(10;4)$

TG 80

Fie $A(1;-2)$, $B(1;3)$. Găsiți $a=?$ dacă $P(2,a)$ este pe bisectoarea lui AOB

$E_1)$ $P(2,a)$ este pe bisectoare

$\Rightarrow dist(P,OA) \equiv dist(P,OB)$



$E_2)$ $OA: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0+y+0-0+2x-0=0$

$\Rightarrow 2x+y=0$

$E_3)$ $OB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x+0+0-0-0-y=0$

$\Rightarrow 3x-y=0$

$E_4)$ $dist(P,OA) \equiv dist(P,OB) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2\cdot x_P + y_P|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{|3x_P - y_P|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{|4+a|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|6-a|}{\sqrt{10}}$

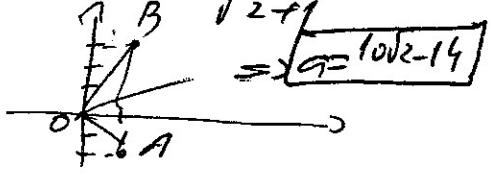
$\Leftrightarrow \sqrt{10}|4+a| = \sqrt{5}|6-a| \;/:\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2}|4+a| = |6-a|$

$E_5) \Rightarrow \sqrt{2}(4+a) = \pm(6-a)$

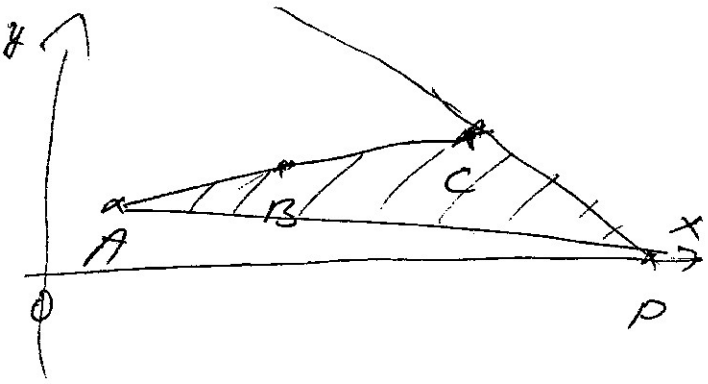
Cazul I: $4\sqrt{2}+\sqrt{2}a = 6-a \Rightarrow a(\sqrt{2}+1) = 6-4\sqrt{2} \Rightarrow a = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ $\cdot(\sqrt{2}-1)$

$\Rightarrow a = \dfrac{6\sqrt{2}-8-6+4\sqrt{2}}{1} = \dfrac{10\sqrt{2}-14}{1}$ $\Rightarrow \boxed{a = 10\sqrt{2}-14}$

Cazul II: $4\sqrt{2}+\sqrt{2}a = -6+a \Rightarrow a = -10\sqrt{2}-14$



Prin simetricul lui $A(1,2)$ față de $B(3,4)$ notat C duc o dreaptă d care $\cap Ox$ în P. Se cere m_d dacă $\mathcal{A}_{APC} = 4$ TG 81



E_1) B mijl AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5 \\ 4 = \frac{2 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 6 \end{cases} \Rightarrow C(5;6)$$

E_2) $P \in Ox \Rightarrow y_P = 0 \Rightarrow P(\alpha, 0)$

E_3) $\mathcal{A}_{APC} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}|\Delta| = 4 \Rightarrow |\Delta| = 8$ unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 2\alpha + 0 - 6\alpha - 0 - 10 = -4\alpha - 4$$

E_4) $|\Delta| = 8 \Rightarrow |-4\alpha - 4| = 8 \Rightarrow -4\alpha - 4 = \pm 8$

E_5) $-4\alpha - 4 = 8 \Rightarrow \alpha = -3$

$-4\alpha - 4 = -8 \Rightarrow -\alpha = 1$.

E_6) $P_1(-3;0)$, $C(5;6) \Rightarrow m_d = \frac{6-0}{5+3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P_2(1;0)$, $C(5;6) \Rightarrow m_d = \frac{6-0}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

TG
82

Fie $A(4,1)$, $B(1,3)$ și d ce trece prin O de pantă m. Se cere m dacă $\forall P \in d$ avem: $PA^2 - PB^2 = OA^2 - OB^2$

$E_1)$ $O \in d$, $m_d = m \Rightarrow y - y_0 = m_d(x - x_0)$

$\Rightarrow y - 0 = m(x - 0) \Rightarrow y = mx$

$E_2)$ $P \in d \Rightarrow y_P = m x_P \Rightarrow P(x_P, m x_P)$

$E_3)$ $PA^2 = (x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 = (4 - x_P)^2 + (1 - m x_P)^2 =$

$= 16 - 8x_P + x_P^2 + 1 - 2m x_P + m^2 x_P^2$

$PB^2 = (x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 = (1 - x_P)^2 + (3 - m x_P)^2 =$

$= 1 - 2x_P + x_P^2 + 9 - 6m x_P + m^2 x_P^2$

$E_4)$ $OA^2 = (4-0)^2 + (1-0)^2 = 17$

$OB^2 = (1-0)^2 + (3-0)^2 = 10$

$E_5)$ $PA^2 - PB^2 = OA^2 - OB^2 \Leftrightarrow$

$(16 - 8x_P + x_P^2 + 1 - 2m x_P + m^2 x_P^2) - (1 - 2x_P + x_P^2 + 9 - 6m x_P + m^2 x_P^2) = 17 - 10$

$\Rightarrow 7 - 6x_P + 4m x_P = 7$

$\Rightarrow x_P(-6 + 4m) = 0, \forall x_P \Rightarrow m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

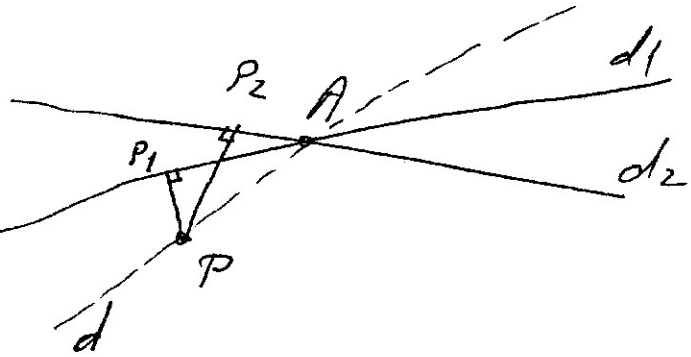
$d_1 \cap d_2 = \{A\}$ unde $d_1: x+y-2=0$

$d_2: 2x-y-4=0$

$A \in d$ unde $d \parallel b_1$, $P \in d$, $P \neq A$, b_1 bisectoarea $\overline{I}$

Se cere raportul distanțelor de la P la d_1 respectiv la d_2 e constant și să se determine acest raport

---



$E_1) d_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

$+$": $3x=6 \Rightarrow x=2$

înloc $\Rightarrow y=0 \Rightarrow \boxed{A(2;0)}$

$E_2) A \in d,\ d \parallel b_1 \Rightarrow m_d = m_{b_1} = 1 \quad (m_{b_1} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1)$

$\Rightarrow d: y-y_A = m_d(x-x_A) \Rightarrow y-0 = 1(x-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x-y-2=0}$

$E_3) P \in d \Rightarrow x_P - y_P - 2 = 0 \Rightarrow x_P = y_P + 2$, not $y_P = \alpha$

$\Rightarrow P(\alpha+2, \alpha)$

$E_4) \operatorname{dist}(P, d_1) = \dfrac{|(\alpha+2)+\alpha-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|2\alpha|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2|\alpha|}{\sqrt{2}} = PP_1$

$\operatorname{dist}(P, d_2) = \dfrac{|2(\alpha+2)-\alpha-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|\alpha|}{\sqrt{5}} = PP_2$

$E_5) \dfrac{PP_1}{PP_2} = \dfrac{\frac{2|\alpha|}{\sqrt{2}}}{\frac{|\alpha|}{\sqrt{5}}} = \dfrac{2|\alpha|}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{|\alpha|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

Găsiți coordonatele lui $P \in AB$ cel mai apropiat de O dacă $A(a,0)$, $B(0,b)$

$E_1)$ $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0+0+ab-0-bx-ay=0$

$bx+ay-ab=0$

$E_2)$ $P \in AB \Rightarrow bx_p+ay_p-ab=0 \Rightarrow x_p=\frac{ab-ay_p}{b}$

$E_3)$ $dist(P,O)=\sqrt{(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2}=$

$=\sqrt{x_p^2+y_p^2}=\sqrt{\left(\frac{ab-ay_p}{b}\right)^2+y_p^2} \xrightarrow{not\ y_p=\alpha}$

$=\sqrt{\frac{(ab-a\alpha)^2+b^2\alpha^2}{b^2}}$

$E_4)$ $dist$ = minimă $\Rightarrow \frac{(ab-a\alpha)^2+b^2\alpha^2}{b^2}$ minim

și cum b^2 constant $\Rightarrow a^2b^2-2a^2b\alpha+\alpha^2(a^2+b^2)$ minim

și e fct de gr II în $\alpha \Rightarrow$ minimul se obține

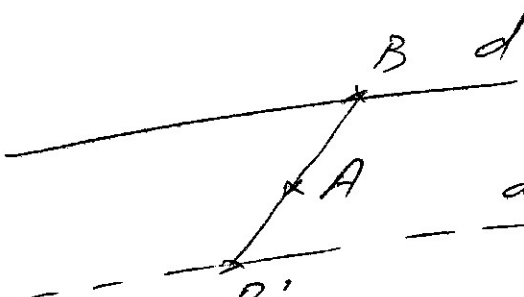
pt $\alpha=-\frac{b}{2a}$. Rescriem funcția ordonată după

grade $\Rightarrow f(\alpha)=\alpha^2(a^2+b^2)-2a^2b\alpha+a^2b^2 \Rightarrow$ minimul se obține

pt $\alpha=-\frac{-2a^2b}{a^2+b^2}=\frac{a^2b}{a^2+b^2} \Rightarrow y_p=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$, $x_p=\frac{ab-ay_p}{b}=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$

Simetrica dreptei $d: y=2-x$ față de $A(2;-3)$ intersectează axele în P și Q, să se calc

$\mathcal{A}_{POQ}$



E_1) Pt a găsi ec lui d', fie $B \in d$ și găsim simetricul lui B față de A

E_2) Fie $x_B=0 \Rightarrow y_B=2-0 \Rightarrow y_B=2 \Rightarrow B(0;2)$

E_3) A mijl $BB' \Rightarrow x_A=\frac{x_B+x_{B'}}{2} \Rightarrow 2=\frac{0+x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'}=4$

$$y_A=\frac{y_B+y_{B'}}{2} \Rightarrow -3=\frac{2+y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'}=-8$$

$\Rightarrow B'(4;-8)$

E_4) $d \parallel d' \Rightarrow m_d=m_{d'}$, $m_d=-\frac{a}{b}$ și $d: x+y-2=0$

$\Rightarrow m_d=-\frac{1}{1}=-1 \Rightarrow m_{d'}=-1$

E_5) ec. d': $y+8=-1(x-4)$

$\Rightarrow y+8=-x+4 \Rightarrow x+y-4=0$

E_6) $d \cap Ox$: $y=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow P(4;0)$

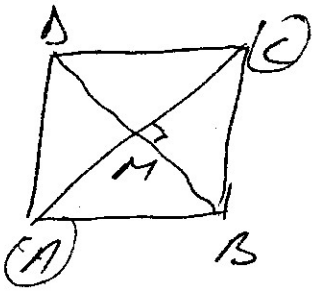
$d \cap Oy$: $x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow Q(0;4)$

E_7) $\mathcal{A}=\frac{1}{2}|\Delta|$, $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=16-0-0-0-0-0=16$

$\Rightarrow \mathcal{A}=8$

TG 86

Fie $A(1,0)$, $C(3,1)$, $ABCD$ pătrat, să se det. coord. lui B și D



E_1) $ABCD$ pătrat $\Rightarrow$ diag au același mijloc și sunt perpendiculare

E_2) M mijl $AC \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(2, \frac{1}{2}\right)$

E_3) $AC \perp BD \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$, $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow m_{BD} = -2$

E_4) ec. BD: $y - y_M = m_{BD}(x - x_M) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -2(x-2) \mid \cdot 2$

$\Rightarrow 2y - 1 = -4x + 8 \Rightarrow \boxed{4x + 2y - 9 = 0}$ ec. BD

E_5) $ABCD$ pătrat $\Rightarrow d = l\sqrt{2} \Rightarrow AC = l\sqrt{2}$

E_6) $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow l^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow AB^2 = \frac{5}{2}$

E_7) $B(x_B, y_B) \in BD \Rightarrow 4x_B + 2y_B - 9 = 0 \Rightarrow y_B = -2x_B + \frac{9}{2}$

not $x_B = \alpha \Rightarrow y_B = -2\alpha + \frac{9}{2} \Rightarrow B\left(\alpha, -2\alpha + \frac{9}{2}\right)$

E_8) $AB^2 = (\alpha - 1)^2 + \left(-2\alpha + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 2 \cdot (+2\alpha) \cdot \frac{9}{2} + \frac{81}{4} = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 5\alpha^2 - 2\alpha + \frac{85}{4} - 18\alpha - \frac{5}{2} = 0 \mid \cdot 4$

$20\alpha^2 - 80\alpha + 85 - 10 = 0 \Rightarrow 20\alpha^2 - 80\alpha + 75 = 0 \mid :5$

$4\alpha^2 - 16\alpha + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow y_B = -2x_B + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \alpha_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_B = -2x_B + \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$

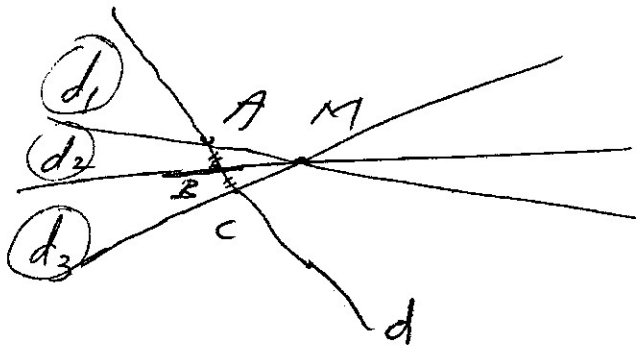
TG

Fie $d_1: x+2y-9=0$, $d_2: x-2y+3=0$, $d_3: 2x+ay-3=0$

Știm că d_1, d_2, d_3 concurente iar d o dreaptă ce trece prin O și intersectează dreptele d_1, d_2 și d_3 în A, B, C. Se cere panta lui d dacă $AB \equiv BC$

$E_1)$ $d_1 \cap d_2: \begin{cases} x+2y=9 \\ x-2y=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow M(3;3)$



$E_2)$ $M \in d_3 \Rightarrow 2\cdot 3 + a\cdot 3 - 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow d_3: 2x-y-3=0$

$E_3)$ ec. d: $y-0=\lambda(x-0) \Rightarrow y=\lambda x$ cu λ necunoscut

$E_4)$ $d \cap d_1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=9 \\ y=\lambda x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{9}{1+2\lambda}; \frac{9\lambda}{1+2\lambda}\right)$

$E_5)$ $d \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ y=\lambda x \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{-3}{1-2\lambda}; \frac{-3\lambda}{1-2\lambda}\right)$

$E_6)$ $d \cap d_3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ y=\lambda x \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2-\lambda}; \frac{3\lambda}{2-\lambda}\right)$

$E_7)$ B mijl lui $AC \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A+x_C}{2} \\ y_B = \frac{y_A+y_C}{2} \end{cases}$, deci $x_B = \frac{x_A+x_C}{2}$

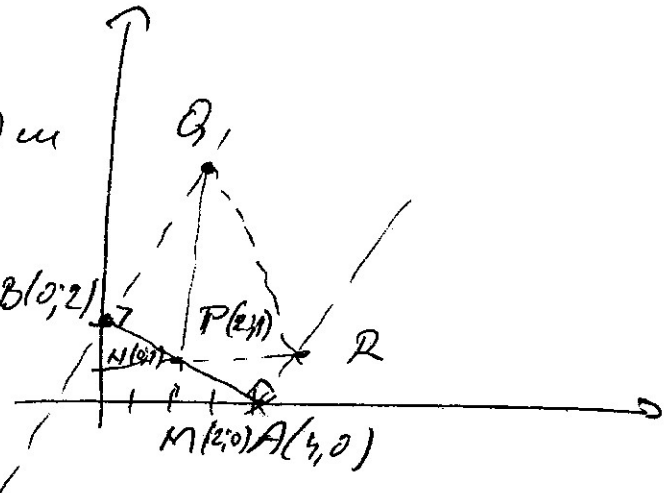
$\Rightarrow \frac{-3}{1-2\lambda} = \frac{\frac{9}{1+2\lambda}+\frac{3}{2-\lambda}}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 11\lambda + 9 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{9}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

$E_8)$ la fel din relația $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \ldots \end{cases} \Rightarrow$ comună $\lambda_1 = 1$

TG 92

Fie $A(4,0)$, $B(0;2)$ și M, N proiecțiile lui P, mijl lui AB pe Ox, respectiv Oy. Dacă Q este punctul de $\perp$ al perpend în B pe AB cu MP și R punctul de $\perp$ al perpend în A pe AB cu NP, se cere aria lui $ABQR$



E_1) Deoarece în ip. avem $\perp$ cu axele, reprezentăm pe axe

E_2) P mijl $AB \Rightarrow \boxed{P(2;1)}$

E_3) proiect lui P pe Ox este M $\Rightarrow \boxed{M(2;0)}$, proiect lui P pe Oy este $N \Rightarrow \boxed{N(0;1)}$

E_4) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$

E_5) $BQ \perp AB \Rightarrow m_{BQ} = 2 \Rightarrow$ ec. BQ: $y - y_B = m_{BQ}(x - x_B)$

$\Rightarrow y - 2 = 2(x-0) \Rightarrow \boxed{2x - y + 2 = 0}$ ec. BQ

E_6) A a găsi Q, facem sist din ec BQ și ec. MP

E_7) Dar, ec. MP este $x = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 6$

$\Rightarrow \boxed{Q(2;6)}$

E_7) $AB \perp AR \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AR} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot m_{AR} = -1 \Rightarrow m_{AR} = 2$

$\Rightarrow$ ec AR: $y - 0 = 2(x-4) \Rightarrow 2x - y - 8 = 0$

E_8) ec. NR: $y = y_N \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow \boxed{R\left(\frac{9}{2};1\right)}$

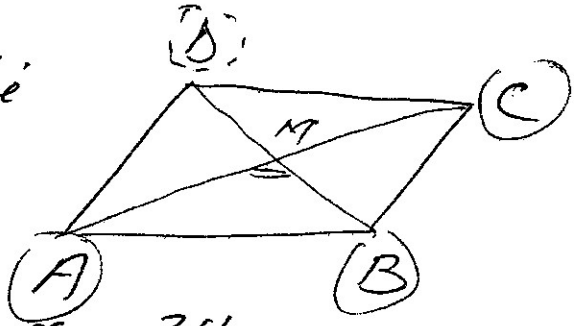
E_9) $AR \parallel BQ \Rightarrow ARQB$ trapez $\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{(BQ + AR) \cdot AB}{2}$

E_{10}) $BQ = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, $AR = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $AB = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{\left(2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot 2\sqrt{5}}{2} = \frac{20+5}{2} = \frac{25}{2}$

Se cere Δ ultimul dintre diag AC și $B\Delta$ ale unui paralelogram dacă $A(2;1)$, $B(3;-1)$, $C(4;3)$, TG 109

E_1) Pt a găsi coord lui Δ, fie M mijl lui $AC \Rightarrow M$ mijl lui $B\Delta$



E_2) M mijl $AC \Rightarrow x_M = \frac{x_A+x_C}{2} \Rightarrow x_M = \frac{2+4}{2} = 3$

$y_M = \frac{y_A+y_C}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1+3}{2} = 2$ $\Rightarrow M(3;2)$

E_3) M mijl $B\Delta \Rightarrow x_M = \frac{x_B+x_\Delta}{2} \Rightarrow 3 = \frac{3+x_\Delta}{2} \Rightarrow x_\Delta = 3$

$y_M = \frac{y_B+y_\Delta}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-1+y_\Delta}{2} \Rightarrow y_\Delta = 5$

$\Rightarrow \Delta(3;5)$

E_4) $AM = \frac{AC}{2}$ și $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2} =$

$= \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = \sqrt{2}$

$BM = \frac{B\Delta}{2}$ și $B\Delta = \sqrt{(x_\Delta-x_B)^2+(y_\Delta-y_B)^2} = \sqrt{(3-3)^2+(5+1)^2} = 6$

$\Rightarrow BM = 3$

E_5) $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(3-2)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

E_6) $A\Delta = \sqrt{(x_\Delta-x_A)^2+(y_\Delta-y_A)^2} = \sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

E_7) verificăm dacă $m(\widehat{AMB}) > 90°$ sau $m(\widehat{AMB}) > 90°$

în ΔAMB, $AB^2 = 5$, $AM^2+MB^2 = 2+9 = 11 \Rightarrow AB^2 < AM^2+MB^2$

$\Rightarrow m(\widehat{AMB}) < 90°$, calculăm $A\Delta^2 = 17$, $AM^2+\Delta M^2 = 11 \Rightarrow$

$A\Delta^2 > AM^2+\Delta M^2 \Rightarrow m(\widehat{AM\Delta}) > 90°$, T cos $\Rightarrow A\Delta^2 = AM^2+MB^2-2AM \cdot MB \cos M$

$\Rightarrow 17 = 11-6\sqrt{2}\cos M \Rightarrow \cos M = \frac{-6}{6\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M = 135°$