ECUAȚII IRAȚIONALE DE TIPUL $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

Rezolvați:

1) $\sqrt{5x+1} = 3$

2) $\sqrt[3]{2x+1} = 2$

3) $\sqrt[4]{x+1} = 2$

4) $\sqrt[4]{2x+1} = -3$

5) $\sqrt{2x+3} = x$

6) $\sqrt{x-3} + x = 5$

7) $x - 1 - \sqrt{3-x} = 0$

8) $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

9) $\sqrt[3]{x-1} = 2x-3$

10) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6} = x-2$

11) $\sqrt[4]{x^4+4x^3+5x^2+2x+4} = x+1$

12) $\sqrt{1-\sqrt{x^4+x}} = x-1$

13) $\sqrt[4]{x^4+4x^3+5x^2-2} = x+1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\sqrt{2x+3} = x$

E1) Cond: $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; \infty\right) = I_1 \\ x \geq 0 \Rightarrow x \in [0; \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 = [0; \infty)$

E2) $\sqrt{2x+3} = x \mid (\,)^2 \Rightarrow 2x+3 = x^2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} =$

$= \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \in I_C \\ -1 \notin I_C \end{cases}$

E3) $S_g: x = 3$

Prof. Ovidiu Băuescu

Rezolvați: $\sqrt{x-3}+x=5$

$E_1)$ $\sqrt{x-3}=5-x$

$E_2)$ putem să nu punem condiții dar soluțiile posibile trebuie să le verificăm în ec inițială

$E_3)$ $\sqrt{x-3}=5-x \;/(\;)^2$

$x-3=(5-x)^2 \Rightarrow x-3=25-10x+x^2$

$x^2-11x+28=0$

$x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-112}}{2\cdot 1}=\dfrac{11\pm 3}{2}$ $\begin{cases}\frac{14}{2}=7\\ \frac{8}{2}=4\end{cases}$

$E_4)$ soluții posibile: $x\in\{4;7\}$

$E_5)$ înlocuiesc: $x=4\Rightarrow\sqrt{1}=5-4$ adev.

$x=7\Rightarrow\sqrt{4}=5-7\Rightarrow 2=-2$ Fals

$E_6)$ S_f: $x=4$

Prof. Ovidiu Băgescu

Rezolvați: $x-1-\sqrt{3-x}=0$

$E_1)\ -\sqrt{3-x}=-x+1 \mid \cdot(-1)$

$\sqrt{3-x}=x-1$

$E_2)$ cond: $\begin{cases} 3-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 3 \\ x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in[1;3]=I_c$

$E_3)\ \sqrt{3-x}=x-1 \mid (\ )^2$

$3-x=(x-1)^2 \Leftrightarrow 3-x=x^2-2x+1$

$x^2-x-2=0$

$E_4)\ x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm 3}{2}\begin{cases} 2\in I_c \\ -1\notin I_c \end{cases}$

$E_5)\ S_f:\ \boxed{x=2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

E_1) Cond: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1;\infty) = I_1$ nu o rezolvăm deoarece soluția se verifică în ecuația inițială

E_2) $\overset{(\cdot)^2}{\Rightarrow} x+8-6\sqrt{x-1} = 1$

$$-6\sqrt{x-1} = -x-7 \mid \cdot(-1) \Rightarrow 6\sqrt{x-1} = x+7$$

E_3) Cond.: $x+7 \geq 0 \Rightarrow x \in [-7;\infty) = I_2$

$\overset{(\cdot)^2}{\Rightarrow} 36x-36 = x^2+14x+49$

$$x^2-22x+85=0, \quad x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484-340}}{2}$$

$$= \frac{22 \pm 12}{2} \begin{matrix} \nearrow 17 \in I_1 \cap I_2 \\ \searrow 5 \in I_1 \cap I_2 \end{matrix}$$

E_4) verific în ec. inițială

$x_1 = 17 \Rightarrow \sqrt{17+8-6\cdot 4} = 1$ adev.

$x_2 = 5 \Rightarrow \sqrt{13-6\cdot 2} = 1$ adev.

$S_f: x \in \{5; 17\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați: $\sqrt{1-\sqrt{x^4+x}} = x-1$

$E_1)$ Cond: $\begin{cases} x^4+x \geq 0 \\ 1-\sqrt{x^4+x} \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ nu le rezolv dar soluțiile posibile le verific în ec. inițială.

$E_2)$ $\sqrt{1-\sqrt{x^4+x}} = x-1 \mid ()^2$

$\Rightarrow 1-\sqrt{x^4+x} = (x-1)^2$

$1-\sqrt{x^4+x} = x^2-2x+1$

$-\sqrt{x^4+x} = x^2-2x \mid \cdot(-1) \Rightarrow \sqrt{x^4+x} = -x^2+2x$

$E_3)$ $x^4+x = (-x^2+2x)^2$

$x^4+x = x^4-4x^3+4x^2$

$4x^3-4x^2+x=0$

$E_4)$ $x(4x^2-4x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ sol posibilă} \\ \text{sau} \\ 4x^2-4x+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$

$E_5)$ $x_1=0$, o verif în ec $\Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{0}} \stackrel{?}{=} 0-1$ fals $\Rightarrow x_1$ e sol

$x_2=\frac{1}{2}$ o verific în ec $\Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}-1$ fals $\Rightarrow x_2$ e sol

$E_5)$ $S_p.: x \in \emptyset$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați:

$$\sqrt[4]{x^4+4x^3+5x^2-2} = x+1$$

E_1) Cond.: $\begin{cases} x^4+4x^3+5x^2-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1,\infty) = I_1 \end{cases}$

E_2) Dacă avem cond complicate, ele nu se rezolvă dar soluția este obligatorie să o verificăm în ec. inițială

E_3) $\sqrt[4]{x^4+4x^3+5x^2-2} = x+1 \quad |()^4$

$x^4+4x^3+5x^2-2 = (x+1)^4$

E_4) Dar, $(x+1)^4 = [(x+1)^2]^2 = (x^2+2x+1)^2 =$

$= x^4 + \underline{4x^2} + 1 + 2\cdot x^2\cdot 2x + \underline{2\cdot x^2\cdot 1} + 2\cdot 2x\cdot 1 =$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

E_5) ec.: $\cancel{x^4}+4\cancel{x^3}+5x^2-2 = \cancel{x^4}+4x^3+6x^2+4x+1$

$5x^2-2 = 6x^2+4x+1 \Rightarrow x^2+4x+3=0$

E_6) $x_{1,2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{-4\pm 2}{2} \begin{matrix} -1 \in I_1 \\ -3 \notin I_1 \end{matrix}$

E_7) Vf.: $x_1=-1 \Rightarrow \sqrt[4]{1-4+5-2} = -1+1 \Rightarrow 0=0$ adev. $\Rightarrow \underline{x_1=-1}$ sol

$x_2=-3 \notin I_1 \Rightarrow$ nu e soluție

Rezolvați:

$$\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=2$$

$E_1)$ $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=2 \mid ()^2$

$7-x+2\sqrt{(7-x)(x-5)}+x-5=4$

$2\sqrt{(7-x)(x-5)}=2 \mid :2 \Rightarrow \sqrt{(7-x)(x-5)}=1 \mid ()^2$

$E_2)$ $(7-x)(x-5)=1 \Rightarrow 7x-35-x^2+5x=1$

$-x^2+12x-36=0 \mid \cdot(-1)$

$x^2-12x+36=0$

$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm 0}{2}=6$ soluție, nombre

$E_3)$ Overificăm în ec

$\sqrt{7-6}+\sqrt{6-5}=2 \Leftrightarrow 1+1=2$ adev

$\Rightarrow x=6$ soluție

Prof. Ovidiu Rădescu