PROBLEME DE NUMĂRARE

1) câte $f: \{1;2;3\} \to \{7;8;9;10\}$ există?

2) câte $f: \{1;2;3;4\} \to \{1;2;3;4\}$ cu $f(1) = f(4)$ există?

3) câte numere ≤ 100 se divid cu 2 și cu 3?

4) câte numere din $\{1;2;\dots;100\}$ se divid cu 3 sau cu 4?

5) câte nr. de 5 cifre în care nicio cifră nu se repetă există?

6) nr. submulțimi $A = \{0;1;\dots;9\}$ de 5 elemente din care exact 2 numere sunt pare?

7) câte nr. $\overline{abcd}$ cu $a<b<c<d$ există?

8) găsiți numărul laturilor unui poligon convex cu 35 de diagonale

9) câte f inj $f: \{1;3;4\} \to \{2;3;5;6\}$ există?

10) câte f strict monotone $f: \{2;3;4;5;6\} \to \{3;8;9;10;11;12;13\}$ există?

11) găsiți nr f cu $f(1) = f(5) = f(7)$ dacă $f: \{1;2;\dots;7\} \to \{2;3;4;5\}$

12) câte nr. de 5 cifre distincte există?

13) Fie $M = \{1;2;3;4;5\}$, găsiți câte triplete (a,b,c) cu $a<b<c$ are M.

14) Câte diagonale are un poligon convex cu 50 de laturi?

15) câte numere $\overline{abcd}$ unde $b = a+2$ și nu sunt formate cu cifre din $\{1;3;5;7;9\}$

16) Găsiți probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta să aibă cifra zecilor mai mică decât a unităților

17) Fie $A = \{f \mid f: \{1;2;3;4\} \to \{1;2;3;4\}\}$. Găsiți probabilitatea ca alegând o funcție din A, aceasta să verifice $f(1) + f(2) = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Se cere nr. fct $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}^2$

cu $f(1) = f(4)$

E, $f(1) \to 4$ v
$f(2) \to 4$ v
$f(3) \to 4$ v
$f(4)$ depinde de $f(1)$

} independ. $\Rightarrow$ regula produsului

$\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ fct

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte nr. $N \leq 100$ se divid cu 2 și cu 3? (3)

$E_1)$ $N \vdots 2$, $N \leq 100 \Rightarrow \{0; 2; 4; 6; 8; \dots; 100\} = M_1$

$E_2)$ $N \vdots 3$, $N \leq 100 \Rightarrow \{0; 3; 6; 9; 12; \dots; 99\} = M_2$

$E_3)$ $N \vdots 2$ și $N \vdots 3 \Rightarrow N \in M_1 \cap M_2$

$\Rightarrow N \in \{0; 6; 12; \dots; 96\}$

$E_4)$ progr. aritm. cu $a_1 = 0$, $a_n = 96$, $r = 6$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$

$96 = 0 + (n-1) \cdot 6 \Rightarrow 96 = 6n - 6$

$\Rightarrow 6n = 102 \mid : 6$

$n = 17$

$\Rightarrow$ 17 numere

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte elemente din $\{1, 2, \ldots, 100\}$ se divid cu 3 sau cu 4?

$E_1)$ $M_3 = \{3, 6, \ldots, 99\}$

pt a afla câte elemente sunt folosim

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 99 = 3 + (n-1)\cdot 3$

$96 = 3n - 3 \Rightarrow 99 = 3n \Rightarrow n = 33$

$E_2)$ $M_4 = \{4, 8, \ldots, 100\}$

pt a afla câte elemente sunt folosim

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 100 = 4 + (n-1)4$

$\Rightarrow 96 = 4n - 4 \Rightarrow 4n = 100 \Rightarrow n = 25$

$E_3)$ $card(M_3 \cup M_4) = card M_3 + card M_4 - card(M_3 \cap M_4)$

$E_4)$ $M_3 \cap M_4 = M_{12} = \{12, 24, \ldots, 96\}$

$\Rightarrow$ 8 elemente

$E_5)$ $card(M_3 \cup M_4) = 33 + 25 - 8 = 50$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți numărul submulțimilor lui $A=\{0;1;\dots;9\}$ de 5 elemente din care exact 2 sunt pare

---

E_1) o submulțime are forma $M=\{p_1;p_2;i_1;i_2;i_3\}$

E_2) trebuie să aleg 2 nr. pare din 5 ale mulțimii A, nu contează ordinea $\Rightarrow C_5^2$

E_3) trebuie să aleg 3 nr impare din 5 ale mulțimii A, nu contează ordinea $\Rightarrow C_5^3$

E_4) nr. de sub cerut este $C_5^2 \cdot C_5^3 =$

$$= \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 5}{2} = 100$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte numere de forma $\overline{abcd}$ cu $a<b<c<d$

mod I: $a \neq 0 \Rightarrow a, b, c, d \in \{1; 2; \ldots; 9\}$, deoarece în care în câte moduri aranjăm $a<b<c<d$, adică 4 din 9 $\Rightarrow C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$

mod II

E_1) $a=1 \Rightarrow b=2 \Rightarrow c=3 \Rightarrow d \rightarrow$ 6 variante
$c=4 \Rightarrow d \rightarrow$ 5 variante
$c=5 \Rightarrow c \rightarrow$ 4 variante
$c=6 \Rightarrow d \rightarrow$ 3 variante
$c=7 \Rightarrow d \rightarrow$ 2 variante
$c=8 \Rightarrow d \rightarrow$ 1 variantă
} 21 ✓

$\Rightarrow b=3 \Rightarrow c=4 \ldots$ } 15 ✓
$c=8$

$b=4 \Rightarrow c=5, \ldots c=8 \rightarrow 10$ ✓
$b=5 \Rightarrow c=6, \ldots c=8 \rightarrow 6$ ✓
$b=6 \Rightarrow c \rightarrow 7, c=8 \rightarrow 3$ ✓
$b=7 \rightarrow c=8, d \rightarrow 9 \rightarrow 1$ ✓

E_2) $a=1 \Rightarrow 21+15+10+6+3+1 = 56$ numere
$a=2 \Rightarrow b \in \{3, \ldots, 7\} \Rightarrow 15+10+6+3+1 = 35$
$a=3 \rightarrow b \in \{4; \ldots; 7\} \Rightarrow 10+6+3+1 = 20$
$a=4 \rightarrow b \in \{5; 6; 7\} \Rightarrow 6+3+1 = 10$
$a=5 \rightarrow b \in \{6; 7\} \rightarrow 3+1 = 4$
$a=6 \rightarrow b=7 \rightarrow 1 = 1$

E_3) în total $\boxed{56+35+20+10+4+1 = 126}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Determinați numărul laturilor unui poligon convex cu 35 diagonale

---

E_1) Dacă $A_1A_2\ldots A_n$ poligon convex cu n vârfuri $\Rightarrow$ $A_1 \to (n-3)$ diagonale

(Atenție: A_1A_1 nu e diag
A_1A_2 nu e diag
A_1A_n nu e diag)

E_2) $A_1 \to (n-3)$ diag
$A_2 \to (n-3)$ diag
— — —
$A_n \to (n-3)$ diag

Dar, diag A_iA_j este considerată și la A_i, și la A_j $\Rightarrow$ nr. diag ~~de ori~~ este de 2 ori cel real
$\Rightarrow$ nr. diag real: $\frac{n(n-3)}{2}$

E_3) $\frac{n(n-3)}{2} = 35 \Rightarrow n^2 - 3n - 70 = 0$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 17}{2} < \begin{matrix} 10 \\ -\frac{14}{2} = -7 \notin \mathbb{N} \end{matrix} \Rightarrow 10 \text{ laturi}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți numărul funcțiilor:

$f: \{1; 2; \dots; 7\} \to \{2; 3; \dots; 5\}$ cu

$f(1) = f(5) = f(7)$

E_1) $f(1) \to$ 4 variante

$f(2) \to$ 4 variante

$f(3) \to$ 4 variante

$f(4) \to$ 4 variante

$f(5)$ depinde de $f(1)$

$f(6) \to$ 4 variante

$f(7)$ depinde de $f(1)$

sunt independente $f(1), f(2), f(3), f(4), f(6)$

E_2) regula produsului $\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ funcții

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți câte numere de 5 cifre distincte există (în care nicio cifră nu se repetă)?

$E_1)$ $N = \overline{abcde}$

$E_2)$ $a \to 9$ v (fără 0)

$b \to 9$ v (diferit de a)

$c \to 8$ v

$d \to 7$ v

$e \to 6$ v

independ

regula prod. $\Rightarrow 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27 \cdot 216$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $M=\{1,2,3,4,5\}$, găsiți câte triplete (a,b,c) cu $a,b,c \in M$ și $a<b<c$

E_1) TEORIE: nr. submulțimi ordonate crescător cu k elemente din n posibile este

$$C_n^k$$

E_2) în cazul nostru, $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} =$

$$= \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = 10$$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, cifra zecilor să fie mai mică decât a unităților

---

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{m. caz favorabile}}{\text{m. caz posibile}}$

$E_2)$ <u>m. caz posibile</u>: $N = \overline{ab}$

$a \to 9$ v

$b \to 10$ v

independ

$9 \cdot 10 = 90$

$E_3)$ <u>m. caz favorabile</u>: $N = \overline{ab}$, $a < b$

<u>Caz I</u>: $a = 1 \Rightarrow b$ 8 variante $\Rightarrow$ 8 numere

<u>Caz II</u>: $a = 2 \Rightarrow b$ 7 variante $\Rightarrow$ 7 numere

---

<u>Caz VIII</u>: $a = 8 \Rightarrow b$ 1 variantă $\Rightarrow$ 1 număr

În total $1 + 2 + \dots + 8 = \dfrac{8(8+1)}{2} = 36$

$E_4)$ $P = \dfrac{36 \cdot 6}{90} = \dfrac{6^3}{15} = \dfrac{2}{5}$

Prof. Virgil Bădescu

Fie $A = \{ f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} \}$. Găsiți probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea A, aceasta să verifice: $f(1) + f(2) = 4$

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ <u>nr. caz posibile</u>: toate funcțiile $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ și numărul lor este 4^4

$E_3)$ <u>caz favorabile</u>: doar funcțiile ce verifică $f(1) + f(2) = 4$

<u>Caz I</u>: $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) \to 4$ v, $f(4) \to 4$ var $\Rightarrow 4^2$ funcții

<u>Caz II</u>: $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) \to 4$ v, $f(4) = 4$ variante $\Rightarrow 4^2$ funcții

<u>Caz III</u>: $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) \to 4$ v, $f(4) = 4$ variante $\Rightarrow 4^2$ funcții

<u>Caz IV</u>: $f(1) = 4 \Rightarrow \nexists f(2)$ a.î. $f(1) + f(2) = 4$ $\Rightarrow 0$ funcții

$E_4)$ Deoarece e vorba de cazuri, în total avem $4^2 + 4^2 + 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$ funcții

$E_5)$ $P = \dfrac{48}{\ldots} = \dfrac{3}{\ldots}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte numere de patru cifre, nu neapărat distincte de forma $\overline{abcd}$ unde $b = a+2$ se pot forma cu cifre din $\{1; 3; 5; 7; 9\}$

E_1) $a \rightarrow$ 5 variante însă dacă $a=1 \Rightarrow b=3$
$a=3 \Rightarrow b=5$
$a=5 \Rightarrow b=7$
$a=7 \Rightarrow b=9$
$a=9 \Rightarrow b=11 \notin A$

$\Rightarrow a$ poate lua doar 4 variante

E_2) $b = a+2 \Rightarrow b$ depinde de a

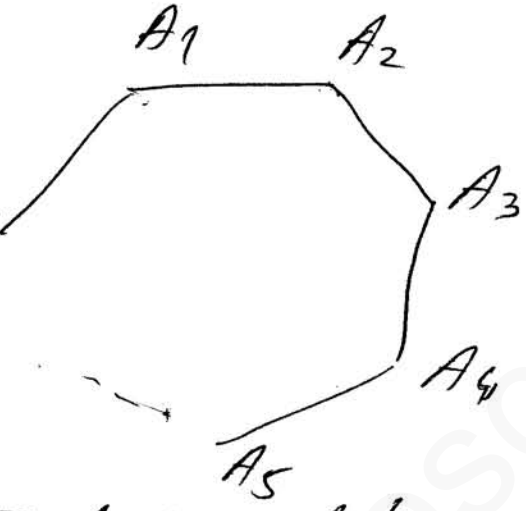
$c \rightarrow 5$ V
$d \rightarrow 5$ V

E_3) $a \rightarrow 4$ V
b depinde de a
$c \rightarrow 5$ V
$d \rightarrow 5$ V
independent

$\Rightarrow 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ variante

Prof. Ovidiu Badescu

Câte diag. are un poligon convex cu 50 laturi?



E_1) $A_1 \rightarrow$ 47 diag

$A_2 \rightarrow$ 47 diag

$A_3 \rightarrow$ 46 diag (pt că A_3A_1 a fost numărată)

$A_4 \rightarrow$ 45 diag

- - - - - -

$A_{48} \rightarrow$ 2 diag

$A_{49} \rightarrow$ 1 diag

în total: $(1+2+\dots+46+47)+47 =$

$$= \frac{47 \cdot 48}{2} + 47 = \frac{47(48+2)}{2} =$$

$$= \frac{47 \cdot 50}{2} = 47 \cdot 25 = 1175$$

---

met II: număr diag și rezultatul îl împart la 2 pt că fiecare diag o număr de 2 ori

$A_1 \rightarrow 47$
$A_2 \rightarrow 47$
$A_3 \rightarrow 47$
- - -
$A_n \rightarrow 47$

$\Rightarrow$ dublul diag $= 47 \cdot 50$

$\Rightarrow$ m. diag $= \frac{47 \cdot 50}{2} = 47 \cdot 25 = 1175$

Prof. Ovidiu Bădescu