FUNCȚII INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE, GĂSIREA INVERSEI

(PENTRU FUNCȚII CU ACOLADE)

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în cas afirmativ, calculați inversa pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 1 \\ 3x-2, & x > 1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 4-x, & x \ge 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ 1-x, & x \ge 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 3+x, & x < 0 \\ x^2+2, & x \ge 0 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x < 0 \\ x^2+1, & x \ge 0 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x < 0 \\ x^2+5x+1, & x \ge 0 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < 2 \\ -x-1, & x \ge 2 \end{cases}$

$a = ?$ dacă funcțiile următoare sunt, pe rând,

a) injective

b) surjective

c) bijective

și, în cazul bijectivității, găsiți inversa pentru:

1) $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \le 1 \\ ax-1, & x > 1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} ax+2, & x < -1 \\ x+3a+1, & x \ge -1 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 5x+a, & x < 2 \\ x+(a+1), & x \ge 2 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} (a+1)x-3, & x < 5 \\ 3x+a-2, & x \ge 5 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în caz afirmativ, calculați inversa pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x<2\\ -x-1, & x\geq 2\end{cases}$

E_1) construim tabelul atașat

x	$-\infty$		2		∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

$f(-\infty)=-2(-\infty)+1=\infty$

$f_s(2)=-2\cdot 2+1=-3$

$f_d(2)=-2-1=-3$

$f(\infty)=-\infty-1=-\infty$

E_2) Fie $f_1:(-\infty;2)\to(-3;\infty)$, $f_1(x)=-2x+1$ și

$f_2:[2;\infty)\to(-\infty;-3]$, $f_2(x)=-x-1$

E_3) f injectivă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (f_1, f_2 inject și $f(I_1)\cap f(I_2)=\emptyset$)

$f_1(x)=-2x+1$, fie $f_1(x_1)=f_2(x_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow -2x_1+1=-2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow f_1$ injectivă (1)

$f_2(x)=-x-1$, fie $f_2(x_1)=f_2(x_2)$

$\Rightarrow -x_1-1=-x_2+1\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$

$\Rightarrow f_2$ injectivă (2)

$f(I_1)\cap f(I_2)=(-3;\infty)\cap(-\infty;-3]=\emptyset$ (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow f$ injectivă

E_4) f surjectivă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (f_1, f_2 surject și $f(I_1)\cup f(I_2)=Cd_f$)

$f_1(x)=-2x+1$, $a=-2\Rightarrow f_1\searrow$

și din tabel $\Rightarrow \mathrm{Im}\, f_1=(-3;\infty)=Cd_{f_1}$

$\Rightarrow f_1$ surjectivă (4)

$f_2(x)=-x+1$, $a=-1<0\Rightarrow f_2\searrow$

și din tabel $\Rightarrow \mathrm{Im}\, f_2=(-\infty;-3]=Cd_{f_2}$

$\Rightarrow f_2$ surjectivă (5)

$f(I_1)\cup f(I_2)=(-3;\infty)\cup(-\infty;-3]=Cd_f$ (6)

Din (4), (5), (6) $\Rightarrow f$ surjectivă

E_5) f inj și f surj $\Rightarrow f$ bijectivă

$\Rightarrow f$ inversabilă $\Rightarrow$ găsim f^{-1}

E_6) $f_1:(-\infty;2)\to(-3;\infty)$, $f_1(x)=-2x+1$

$f_1(x)=y\Rightarrow -2x+1=y\Rightarrow x=\frac{1-y}{2}$

$\Rightarrow f_1^{-1}:(-3;\infty)\to(-\infty;2)$, $f_1^{-1}(x)=\frac{1-x}{2}$

$f_2:[2;\infty)\to(-\infty;-3]$, $f_2(x)=-x+1$

$f_2(x)=y\Rightarrow -x+1=y\Rightarrow x=1-y$

$\Rightarrow f_2^{-1}:(-\infty;-3]\to[2;\infty)$, $f_2^{-1}(x)=1-x$

E_7) $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{2}, & x>-3\\ 1-x, & x\leq -3\end{cases}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}1-x, & x\leq -3\\ \frac{1-x}{2}, & x>-3\end{cases}$

Prof. Cristian Bănescu