ECUAȚII LOGARITMICE CE SE REZOLVĂ FOLOSIND FORMULE

Rezolvați:

1) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6}$

2) $\log_2 x + \log_2 x^2 + \log_2 x^4 = 28$

3) $1 + \log_2(x+2) = \log_2(3x+4)$

4) $2 + \log_3(x+1) = \log_3(5x^2+7)$

5) $2\lg(2x+1) = \lg(3x^2+5x+7)$

6) $\log_3(6-x) + 2\log_3\sqrt{4-x} = 1$

7) $\lg(2x+6) - 2\lg(2x-3) = 1$

8) $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2}$

9) $\log_5(2x-5) + \log_5(2x-1) = 1$

10) $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$

11) $\log_6(x-9)^2 - 2 = 2\log_6(x-2)$

12) $\log_5(x^2+2x-3) = 1$

13) $\lg x + \lg(x+90) = 3$

14) $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 3$

15) $\log_3(\log_4(x^2-17)) = 1$

16) $\log_2(x^2-1) = 3$

17) $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $2+\log_3(x+1)=\log_3(5x^2+7)$ 4

E_1) cond: $x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x\in(-1,\infty)$

$5x^2+7>0$, $x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{0-140}}{2\cdot 5}$

$\Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$

$5x^2+7$	+ + + + + +

$\Rightarrow \forall x\ 5x^2+7>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}=I_2$

$I_C=I_1\cap I_2=(-1,\infty)$

E_2) scriem $2=\log_3 3^2 \Rightarrow 2=\log_3 9$

E_3) ec.: $\log_3 9+\log_3(x+1)=\log_3(5x^2+7)$

$\Rightarrow \log_3(9(x+1))=\log_3(5x^2+7)$

E_4) deoarece $f(x)=\log_3 x$ e injectivă

$\Rightarrow 9(x+1)=5x^2+7 \Rightarrow 5x^2-9x-2=0$

$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{2\cdot 5}=\frac{9\pm 11}{10}$ $\begin{cases}\frac{20}{10}=2\in I_C\\ -\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}\in I_C\end{cases}$

E_5) $S_f: x\in\{-\frac{1}{5},2\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați:

$$2\lg(2x+1) = \lg(3x^2+5x+7)$$

E_1) Cond.: $\begin{cases} 2x+1>0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty) = I_1 \\ 3x^2+5x+7>0, \ x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-84}}{2 \cdot 3} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$

x	
$3x^2+5x+7$	$+ + + +$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} = I_2$

E_2) $I_c = I_1 \cap I_2 = (-\frac{1}{2}, \infty)$

E_3) ec devine: $\lg(2x+1)^2 = \lg(3x^2+5x+7)$

deoarece $f(x) = \lg x$ e injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow (2x+1)^2 = 3x^2+5x+7$

$4x^2+4x+1 = 3x^2+5x+7$

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} 3 \in I_c \\ -2 \notin I_c \end{matrix} \Rightarrow S_f : x = 3$

Obs.: dacă avem condiții complicate, nu se rezolvă dar soluția se verifică în ec inițială

$x=3 \Rightarrow 2\lg(6+1) = \lg(3 \cdot 9 + 5 \cdot 3 + 7)$

$\lg 49 = \lg 49$ adev $\Rightarrow x=3$ sol.

$x=-2 \Rightarrow 2\lg(-4+1) = \lg(3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 7)$

$2\lg(-3) = \lg(9)$ fals nu că $\nexists \lg(-3)$

$\Rightarrow S_f : x = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\log_3(6-x)+2\log_3\sqrt{4-x}=1$

$E_1)$ cond $\begin{cases} 6-x>0 \\ \sqrt{4-x}>0 \end{cases}$ nu rezolv condițiile dar soluțiile posibile se verifică în ec inițială

$E_2)$ $\log_3(6-x)+\log_3(\sqrt{4-x})^2=1$

$\log_3(6-x)+\log_3(4-x)=1$

$E_3)$ $\log_3[(6-x)(4-x)]=1$

$E_4)$ din definiția logaritmului $\Rightarrow$

$(6-x)(4-x)=3^1 \Rightarrow$

$24-6x-4x+x^2=3$

$x^2-10x+21=0$

$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm 4}{2}\begin{matrix}7\\3\end{matrix}$ soluții posibile

$E_5)$ verifică în ecuație:

$x_1=7 \Rightarrow \log_3(-1)+2\log_3\sqrt{-3}=1$ Fals pt că

$\nexists \log_3(-1) \Rightarrow x_1=7$ nu e soluție

$x_2=3 \Rightarrow \log_3 3+2\log_3\sqrt{1}=1 \Leftrightarrow 1+2\cdot 0=1$

adev $\Rightarrow x=3$ soluție

$E_6)$ S_f: $\boxed{x=3}$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați: $\lg(2x+6) - 2\lg(2x-3) = 1$

E_1) cond.: $\begin{cases} 2x+6>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow x\in(-3;\infty)=I_1 \\ 2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2} \Rightarrow x\in(\frac{3}{2};\infty)=I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 = (\frac{3}{2};\infty)$

E_2) ec devine: $\lg(2x+6) - \lg(2x-3)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \lg\frac{2x+6}{(2x-3)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+6}{(2x-3)^2} = 10^1$

E_3) $2x+6 = 10(4x^2-12x+9)$

$\Leftrightarrow 40x^2 - 122x + 84 = 0 \mid :2$

$20x^2 - 61x + 42 = 0$

E_4) $x_{1,2} = \frac{61 \pm \sqrt{3721-3360}}{2\cdot 20} = \frac{61\pm\sqrt{361}}{40}$

$\sqrt{361}\,|\,19$; $1^2 \cdot 9 \cdot 9 = 261$; 261

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{61\pm 19}{40}$ < $\frac{80}{40} = 2 \in I_C$; $\frac{42}{40} = \frac{21}{20} \notin I_C$

E_5) $S_f : x = 2$

Prof. Ovidiu Băgescu

Rezolvați: $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2}$

E_1) cond: $\begin{cases} 2x-5>0 \\ x^2-8>0 \\ \log_2(x^2-8)\neq 0 \end{cases}$

nu le rezolvăm, dar soluțiile posibile le verific în ec. inițială

E_2) $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\log_2(2x-5) = \log_2(x^2-8)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-5)^2 = \log_2(x^2-8)$ $\Big\}\Rightarrow$

E_3) deoarece $f(x)=\log_2 x$ e injectivă

$\Rightarrow (2x-5)^2 = x^2-8 \Leftrightarrow 4x^2-20x+25 = x^2-8$

$\Leftrightarrow 3x^2-20x+33=0$

$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-396}}{2\cdot 3} = \frac{20\pm 2}{6} \begin{cases} \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \\ \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$

E_4) soluțiile posibile sunt $x_1 = \frac{11}{3}$ și $x_2 = 3$, le verificăm în ecuație

$x_1 = \frac{11}{3} \Rightarrow \frac{\log_2\left(\frac{22}{3}-\frac{3}{5}\right)}{\log_2\left(\frac{121}{9}-\frac{9}{8}\right)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\log_2 \frac{7}{3}}{\log_2 \frac{49}{9}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\log_2 \frac{7}{3}}{\log_2 \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\log_2 \frac{7}{3}}{2\log_2 \frac{7}{3}} = \frac{1}{2}$ adev. $\Rightarrow \boxed{x=\frac{11}{3}}$ sol.

$x_2 = 3 \Rightarrow \frac{\log_2 1}{\log_2 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{0}{0} = \frac{1}{2}$ fals $\Rightarrow x=3$ nu e sol.

$S_f: x = \frac{11}{3}$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați: $\log_6 (x-9)^2 - 2 = 2\log_6 (x-2)$

E_1) cond.: $\begin{cases} (x-9)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 9 \Rightarrow (-\infty; 9) \cup (9; \infty) = I_1 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x \in (2; \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2 = (2; 9) \cup (9; \infty)$

E_2) scriem totul ca $\log_6 \Rightarrow$

$\log_6 (x-9)^2 - \log_6 6^2 = \log_6 (x-2)^2$

$\Rightarrow \log_6 \left(\frac{x-9}{6}\right)^2 = \log_6 (x-2)^2$

E_3) deoarece $f(x) = \log_6 x$ injectivă

$\Rightarrow \left(\frac{x-9}{6}\right)^2 = (x-2)^2 \Rightarrow \frac{x-9}{6} = \pm (x-2)$

E_4) cazul I: $\frac{x-9}{6} = x-2 \Leftrightarrow x-9 = 6x-12$

$-5x = -3 \Rightarrow x = +\frac{3}{5} \notin I_c$

cazul II: $\frac{x-9}{6} = -(x-2) \Leftrightarrow \frac{x-9}{6} = -x+2$

$\Leftrightarrow x-9 = -6x+12 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3 \in I_c$

E_5) se pun condiții, dacă nu se rezolvă soluțiile posibile se verif în ec inițială

e bine să verificăm dacă $x=3$ soluție

$\log_6 (3-9)^2 - 2 = 2\log_6 (3-2) \Leftrightarrow 2-2 = 0$ adev.

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați ecuația:

$$\log_5(x^2+2x-3)=1$$

E_1) Cond.: $x^2+2x-3>0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}\begin{matrix}\nearrow 1\\ \searrow -3\end{matrix}$$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(1,\infty)=I_C$$

E_2) ecuația devine:

$$x^2+2x-3=5^1$$

$$x^2+2x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}\begin{matrix}\nearrow 2=x_1\\ \searrow -4=x_2\end{matrix}.$$

E_3) $x_1=2\in I_C\Rightarrow x_1=2$ soluție

$x_2=-4\in I_C\Rightarrow x_2=-4$ soluție

$$S=\{-4,2\}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați: $\lg x + \lg(x+90) = 3$

E_1) Cond.: $\begin{cases} x>0 \Rightarrow x\in(0,\infty)=I_1 \\ x+90>0 \Rightarrow x\in(-90,\infty)=I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2 = (0,\infty)$

E_2) Ec. devine: $\lg(x(x+90)) = 3$

$\Rightarrow x(x+90) = 10^3 \Rightarrow x^2+90x-1000=0$

E_3) $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-90\pm\sqrt{8100+4000}}{2}$

$= \dfrac{-90\pm\sqrt{12100}}{2} = \dfrac{-90\pm 10\sqrt{121}}{2}$

$= \dfrac{-90\pm 110}{2}$ $\begin{cases} \frac{20}{2}=10\in I_c \\ -\frac{200}{2}=-100\notin I_c \end{cases}$

E_4) S_f: $x=10$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați:

$$\log_x 2 + \log_{\sqrt[4]{x}} 8 = 3$$

$E_1)$ Cond.: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \sqrt[4]{x} > 0 \\ \sqrt[4]{x} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;\infty)$

$E_2)$ $\log_{\sqrt[4]{x}} 8 = \log_{x^{\frac{1}{4}}} 2^3 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot 3 = 12$

$E_3)$ $\log_x 2 + 12 \log_x 2 = 3$

$13 \log_x 2 = 3 \Rightarrow \log_x 2 = \frac{3}{13}$

$E_4)$ $x^{\frac{3}{13}} = 2 \mid (\,)^{\frac{13}{3}} \Rightarrow x = 2^{\frac{13}{3}} \in I_c$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\log_3(\log_4(x^2-17))=1$

$E_1)$ Cond.: $\begin{cases} x^2-17>0 \\ \log_4(x^2-17)>0 \end{cases}$

x		$-\sqrt{17}$		$\sqrt{17}$	
x^2-17	$+$	0	$-$	0	$+$

$E_2)$ $x^2-17>0$

$x^2=17 \Rightarrow x=\pm\sqrt{17}$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{17})\cup(\sqrt{17},\infty)=I_1$

$E_3)$ $\log_4(x^2-17)>0 \Leftrightarrow \log_4(x^2-17)>\log_4 1$

baza $b=4>1 \Rightarrow x^2-17>1 \Rightarrow x^2-18>0$

$x^2=18 \Rightarrow x=\pm 3\sqrt{2}$

x		$-3\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$x\in(-\infty,-3\sqrt{2})\cup(3\sqrt{2},\infty)=I_2$

$E_4)$ $x\in I_1\cap I_2=(-\infty,-3\sqrt{2})\cup(3\sqrt{2},\infty)=I_C$

$E_5)$ Folosim $\log_b A=N \Leftrightarrow A=b^N$

$\Rightarrow \log_3(\log_4(x^2-17))=1 \Rightarrow \log_4(x^2-17)=3^1$

$\Rightarrow \log_4(x^2-17)=3 \Rightarrow x^2-17=4^3 \Rightarrow$

$x^2-17=64 \Rightarrow x^2=81 \Rightarrow x=\pm 9$

$E_6)$ $I_C=(-\infty,-\sqrt{18})\cup(\sqrt{18},\infty)=I_C$

$x=\pm 9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{81}\in I_C$

$\Rightarrow S_p: x\in\{\pm 9\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați ecuația:

$$\log_2(x^2-1)=3$$

E_1) Cond.: $x^2-1>0$

ec. atașată: $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

$\Rightarrow x=\pm 1$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$x^2-1>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)=I_C$

E_2) $\log_2(x^2-1)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-1=2^3$

$\Leftrightarrow x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9$

$\Rightarrow x=\pm 3$

E_3) $x_1=-3\in I_C \Rightarrow x_1=-3$ soluție

$x_2=3\in I_C \Rightarrow x_2=3$ soluție

$S_p: x\in\{-3;3\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați în numere reale ecuația: 17

$$\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$$

Soluție:

Cond.: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow I_C = (0;1) \cup (1;\infty)$

$$\log_x 2 + \log_{x^{\frac{1}{2}}} 2 = 9$$

$$\Rightarrow \log_x 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_x 2 = 9$$

$$\log_x 2 + 2 \log_x 2 = 9$$

$$3 \log_x 2 = 9 \Rightarrow \log_x 2 = 3$$

$$\Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \in I_C$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \text{ soluție}$$

Prof. Ovidiu Bădescu