FUNCȚII INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE, GĂSIREA INVERSEI

(PT FUNCȚII CU O RAMURĂ)

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și în caz afirmativ calculați inversa pentru:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

2) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $f(x)=x^2$

3) $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

4) $f:(-\infty,0]\to[0,\infty)$, $f(x)=x^2$

5) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$

6) $f:(-\infty,3]\to[-8,\infty)$, $f(x)=-3x+1$

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+11$

8) $f:\mathbb{R}\to[3,\infty)$, $f(x)=x^2-4x+1$

9) $f:[4,\infty)\to[-13,\infty)$, $f(x)=x^2-8x+3$

10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$

11) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+4x^2+1$

12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+5x^2+1$

Găsiți parametrul a dacă și numai dacă următoare verifică relația cerută:

1) $f:\mathbb{R}\to[a+1,\infty)$, $f(x)=x^2+4x-1$ și f surjectivă

2) $f:(-\infty;a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+2$, f injectivă

3) $f:[a-1,\infty)\to[-4,\infty)$, $f(x)=x^2+6x-5$. f bijectivă

4) $f:[1,\infty)\to[a,\infty)$, $f(x)=3x+1$, f surjectivă

5) $a=?$, a minim dacă f injectivă, $f(x)=x^2-4x+1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în caz afirmativ, calculați inversa pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

E_1) $\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x) = y$ devine $x^2 = y$

E_2) $y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 = y$ $\begin{cases} y < 0 \Rightarrow \nexists x \\ y \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{y} \end{cases}$

E_3) Deoarece $\exists$ valori ale lui $y \in Cd_f$ pt care $\nexists x \in D_f$ cu $f(x) = y \Rightarrow f$ nu e surjectivă, de exemplu $\exists y = -2$ a.î. $\nexists x \in D_f$ cu $f(x) = -2$

E_4) Deoarece $\exists$ valori ale lui $y \in Cd_f$ pt care $\exists x_1 \neq x_2 \in D_f$ cu $f(x) = y \Rightarrow f$ nu e injectivă de exemplu pt $y = 9 \Rightarrow \exists x_1 = 3$ și $x_2 = -3$, $x_1 \neq x_2$ cu $f(x) = y$ are 2 soluții

E_5) Așadar, f nu e bijectivă $\Rightarrow f$ nu e inversabilă

Prof. Ovidiu Bădescu

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în caz afirmativ, calculați inversa pentru $f:\mathbb{R}\to[0;\infty)$, $f(x)=x^2$

E_1) $\forall y \in Cd_f$, ec $f(x)=y$ devine $x^2=y$

E_2) $y\in[0;\infty) \Rightarrow x^2=y \to x=\pm\sqrt{y}$

Cum $D_f=\mathbb{R} \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$ soluții

E_3) Deoarece $\forall y\in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ are cel puțin o soluție ($x=\pm\sqrt{y}$) $\Rightarrow f$ surjectivă

E_4) Deoarece $\exists y\in Cd_f$ a.î. ec. $f(x)=y$ are două soluții, de exemplu pt $y=4 \Rightarrow$ ec. $f(x)=y$ are soluții $x_1=-2$, $x_2=2$ cu $x_1\neq x_2 \Rightarrow f$ nu e injectivă

E_5) din f nu e injectivă și f surjectivă $\Rightarrow f$ nu e bijectivă $\Rightarrow f$ nu e inversab.

Prof. Ovidiu Bădescu

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în caz afirmativ, calculați inversa pentru $f:(-\infty;0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

E_1) $\forall y\in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ devine $x^2=y$

E_2) $y\in\mathbb{R}$ și $x^2=y\Rightarrow$ $y<0$ $\nexists x$; $y\geq 0$ $x_{1,2}=\pm\sqrt{y}$

Dar, $x\in D_f\Rightarrow x\in(-\infty;0]\Rightarrow$

$x^2=y$ $y<0$ $\nexists x$ sau; $y\geq 0$ $x=-\sqrt{y}$

E_3) Deoarece $\forall y\in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ are cel mult o soluție $x\in D_f$ $\Rightarrow f$ injectivă

E_4) Deoarece $\exists y\in Cd_f$ și A care ec. $f(x)=y$ nu are soluții $x\in D_f$ $\Rightarrow f$ nu e surjectivă

E_5) Dăn f injectivă și f nu e surjectivă $\Rightarrow f$ nu e bijectivă $\Rightarrow f$ nu e inversabilă

Prof. Ovidiu Bădescu

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în caz afirmativ, calculați inversa pentru $f:(-\infty;0]\to[0;\infty)$, $f(x)=x^2$

$E_1)\ \forall y\in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ devine $x^2=y$

$E_2)\ y\in[0;\infty)$ și $x^2=y\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

Dar $x\in D_f\Rightarrow x\in(-\infty;0]\Rightarrow x=-\sqrt{y}$

$E_3)$ Deoarece $\forall y\in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ are exact o soluție $x\in D_f$

$\Rightarrow f$ bijectivă (deci f injectivă și f surjectivă) $\Rightarrow f$ inversabilă și $f^{-1}:[0;\infty)\to(-\infty;0]$ dată de $f^{-1}(y)=-\sqrt{y}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în caz afirmativ, calculați inversa pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+11$

$E_1)\ \forall y\in\mathbb{R}$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow$

$x^2-4x+11=y \Leftrightarrow x^2-4x+11-y=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4(11-y)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{4y-28}}{2}$

Dacă $4y-28\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 7 \Rightarrow \exists x_{1,2}$

Dacă $4y-28<0 \Leftrightarrow y<7 \Rightarrow \nexists x_{1,2}$

$\Rightarrow$ probabil nu e inj, fie $y=8$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}<_1^3 \Rightarrow \exists x_1\neq x_2$

cu $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f$ nu e inj

Pt $y=6 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} \Rightarrow$

$x_{1,2}\notin\mathbb{R} \Rightarrow f$ nu e surj

$\Rightarrow f$ nu e bijectivă

---

not II:

f inj

$E_1)\ \forall x_1, x_2$ cu $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow$

$x_1^2-4x_1+11=x_2^2-4x_2+11 \Leftrightarrow$

$x_1^2-x_2^2-4(x_1-x_2)=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)-4(x_1-x_2)=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ \text{sau} \\ x_1=4-x_2 \end{cases} \Rightarrow$ nu neapărat $x_1=x_2$, pt

$x_2=1 \Rightarrow x_1=4-1=3 \Rightarrow \exists x_1\neq x_2$

cu $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f$ nu e inj

f surj:

Calculăm $\mathrm{Im}\, f$

$f(x)=x^2-4x+11$

$a=1>0 \Rightarrow G_f \cup \Rightarrow f\searrow(-\infty;-\frac{b}{2a}]$

$f\nearrow[-\frac{b}{2a};\infty)$

$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2$

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{16-44}{4}=7$

x	$-\infty$		2		∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	7	$\nearrow$	∞

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=[7,\infty)\neq Cd f \Rightarrow$

f nu e surj.

Prof. Ovidiu Badescu

Studiați injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea și, în caz afirmativ, calculați inversa pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$

E_1) $\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x) = y$ devine $x^3 + x + 1 = y$ de unde nu putem găsi x, așadar căutăm altă metodă

E_2) Fie $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$x_1^3 + x_1 + 1 = x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow$

$x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{sau} \\ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 1 = 0 \end{cases}$

E_3) relația $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 1 = 0$ o considerăm în rap. $x_1 \Rightarrow$

$a = 1$, $b = x_2$, $c = x_2^2 + 1 \Rightarrow$

$\Delta_{x_1} = x_2^2 - 4x_2^2 - 4 = -3x_2^2 - 4 < 0$

$\Rightarrow$ ec nu are soluții așadar $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 1$ nu poate fi 0

E_4) deci, din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ injectivă

E_5) pt a studia surjectivitatea studiem dacă $Im\, f = Cd_f$

$f(x) = x^3 + x + 1 \Rightarrow f(x) = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

x	$-\infty$		∞
$f(x)$	$-\infty$		∞

$x \to -\infty \Rightarrow x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \to -\infty (1+0+0)$

$\Rightarrow \forall x \to -\infty$ avem $f(x) \to -\infty$

$x \to \infty \Rightarrow x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \to \infty (1+0+0)$

$\to \forall x \to \infty$ avem $f(x) \to \infty$

Cum $f_1(x) = x^3$ ↗ , $f_2(x) = x$ ↗ $\Rightarrow$

$f(x) = x^3 + x + 1$ este ↗

$\Rightarrow Im\, f = (-\infty, \infty) = Cd_f \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ surjectivă

E_4) din f inj și f surj

$\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă

dar, în acest caz, nu putem determina inversa (deși ea există)

Obs.: metoda prin care am arătat că f injectivă este destul de grea, dar de ținut minte. În acest caz mai puteam arăta că f s monot $\Rightarrow f$ injectivă