PROBLEME TIP „RĂDĂCINILE DE ORDIN 3 ALE UNITĂȚII"

1) dacă $z=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze $z^{400}+\frac{1}{z^{400}}$

2) dacă α rădăcină a ecuației $X^2+X+1=0$, să se calculeze $(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)\cdots(1+\alpha^{1999})$

3) dacă $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze $2\left(z^{301}+\frac{1}{z^{301}}\right)+5\left(z^{500}+\frac{1}{z^{500}}\right)$

4) dacă $\alpha^2-\alpha+1=0$, să se calculeze $(1-\alpha)^{601}+(\alpha-1)^{302}$

5) dacă $\alpha^2+\alpha+1=0$, să se calculeze $3\left(\alpha^{201}+\frac{1}{\alpha^{201}}\right)+4\left(\alpha^{400}+\frac{1}{\alpha^{400}}\right)$

6) dacă $\alpha=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze $4\left(\alpha^{100}+\frac{1}{\alpha^{100}}\right)-5\left(\alpha^{200}+\frac{1}{\alpha^{200}}\right)$

7) dacă z soluție a ecuației $z^2+2z+4=0$, să se calculeze $z^2-\frac{8}{z}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $z^{400} + \frac{1}{z^{400}}$

$E_1)$ $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (z^2 - z + 1 = 0) \Leftrightarrow (z^3 = -1, z \neq -1)$

$E_2)$ $N = z^{400} + \frac{1}{z^{400}}$

Dar $z^3 = -1$, $400 \mid 3$, 133, 10, 9, 10, 9, 1

$\Rightarrow z^{400} = z^{3 \cdot 133 + 1} = (z^3)^{133} \cdot z^1 = (-1)^{333} \cdot z$

$\Rightarrow z^{400} = -z$

$E_3)$ $N = -z + \frac{1}{-z} = -z - \frac{1}{z} = -\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$N = -\frac{z^2 + 1}{z}$

$E_4)$ Dar, $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z^2 + 1 = z$

$\Rightarrow N = -\frac{z}{z} \Rightarrow N = -1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie α rădăcină a ecuației $x^2+x+1=0$, $\alpha \neq 1$ Calculați $(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)\cdots(1+\alpha^{1999})$

E_1) α rad. $x^2+x+1=0 \Rightarrow \alpha^2+\alpha+1=0$

$\Rightarrow (\alpha^3=1,\ \alpha\neq 1) \Leftrightarrow \left(\alpha_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

E_2) Deoarece $\alpha^3=1 \Rightarrow \alpha^4=\alpha,\ \alpha^5=\alpha^2$

$\Rightarrow$ parantezele se repetă din 3 în 3

E_3) $1999 \mid 3$
$18 \quad 666$
$=19$
18
$=19$
18
$=1$

$\Rightarrow$ 666 de grupe de 3 paranteze și rămâne o paranteză

E_4) $N=\left[(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+1)\right]^{666}(1+\alpha)$

$N=\left[(1+\alpha^2+\alpha+\alpha^3)\cdot 2\right]^{666}\cdot(1+\alpha)$

E_5) Dar, $\alpha^2+\alpha+1=0$ și $\alpha^3=1$

$\Rightarrow N=(1\cdot 2)^{666}(1+\alpha)=2^{666}\cdot(1+\alpha)$

E_6) Dar, $\alpha^2+\alpha+1=0 \Rightarrow 1+\alpha=-\alpha^2$

$N=2^{666}\cdot(-\alpha^2)$

Prof. Ovidiu Badescu

Dacă $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze

$$2\left(z^{301}+\frac{1}{z^{301}}\right)+5\left(z^{500}+\frac{1}{z^{500}}\right)$$

E1) TEORIE:

$(\alpha^3=1, \alpha\neq 1) \Leftrightarrow (\alpha^2+\alpha+1=0) \Leftrightarrow \left(\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$

$(\alpha^3=-1, \alpha\neq -1) \Leftrightarrow (\alpha^2-\alpha+1=0) \Leftrightarrow \left(\alpha_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$

E2) în cazul nostru, $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ se încadrează

în cazul I $\Rightarrow (z^3=1, z\neq 1)$ și $(z^2+z+1=0)$

E3) $N=2\left((z^3)^{100}\cdot z+\frac{1}{(z^3)^{100}\cdot z}\right)+5\left((z^3)^{166}\cdot z^2+\frac{1}{(z^3)^{166}\cdot z^2}\right)$

$500 \mid 3$ $\quad 166$
3
20
18
$=20$
18
$=2$

$\overset{z^3=1}{\Longrightarrow} N=2\left(z+\frac{1}{z}\right)+5\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$

$\Rightarrow N=2\cdot\frac{z^2+1}{z}+5\cdot\frac{z^4+1}{z^2}$

E4) dar, $z^2+z+1=0 \Rightarrow z^2+1=-z$ și $z^4=z^3\cdot z$

$\Rightarrow N=2\cdot\frac{-z}{z}+5\cdot\frac{z+1}{z^2} \Rightarrow N=-2+5\cdot\frac{-z^2}{z^2}$

$N=-2-5 \Rightarrow N=-7$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $\alpha^2-\alpha+1=0$, se cere

$$(1-\alpha)^{601}+(\alpha-1)^{302}$$

E_1) TEORIE:

$(\alpha^3=1, \alpha\neq 1) \Leftrightarrow (\alpha^2+\alpha+1=0) \Leftrightarrow \left(\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$

$(\alpha^3=-1, \alpha\neq -1) \Leftrightarrow (\alpha^2-\alpha+1=0) \Leftrightarrow \left(\alpha_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$

E_2) din $i) \Rightarrow \alpha^2-\alpha+1=0 \Rightarrow$ suntem în cazul II

$\Rightarrow \alpha^3=-1, \alpha\neq -1$ și din $\alpha^2-\alpha+1=0 \Rightarrow 1-\alpha=-\alpha^2$

E_4) $N=(1-\alpha)^{601}+(\alpha-1)^{302}$

$$N=(-\alpha^2)^{601}+(\alpha^2)^{302}$$

$$N=-\alpha^{1202}+\alpha^{604}$$

E_5) dar, $\alpha^3=-1$,

$1202 \mid 3$, 12, 02, 400, 2

$604 \mid 3$, 6, 04, 201, 3, 1

$$N=-(\alpha^3)^{400}\cdot\alpha^2+(\alpha^3)^{201}\cdot\alpha \Rightarrow$$

$$N=-(-1)\cdot\alpha^2-\alpha=$$

$$N=\alpha^2-\alpha=-1 \quad (\text{pt că } \alpha^2-\alpha+1=0)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie z soluție pentru: $z^2+2z+4=0$, se cere

$$z^2-\frac{8}{z}=0$$

Soluție:

Calculez $z^2-\frac{8}{z}=\frac{z^3-8}{z}=\frac{(z-2)(z^2+2z+4)}{z}$

$=0$

Din ip $\Rightarrow z^2+2z+4=0 \mid \cdot(z-2)$

$\Rightarrow (z-2)(z^2+2z+4)=0$

$\Rightarrow z^3-8=0 \Rightarrow z^3=8$

Înlor $\Rightarrow \frac{z^3-8}{z}=\frac{0}{z}=0$

S-a folosit: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Prof. Ovidiu Bădescu