REZOLVARE DE ECUAȚII DE GRAD II ÎN NUMERE COMPLEXE

Rezolvați în $\mathbb{C}$:

1) $z^2 = -10i$

2) $z^2 = 5+12i$

3) $z^2 = 8-6i$

4) $z^2 = 16-30i$

5) $z^2+6z+25=0$

6) $(1+i)z^2+(i-6)z+2-3i=0$

7) $2iz^2+3(1+i)z+3-i=0$

8) $(i-3)z^2+(7-11i)z+4+6i=0$

9) $z^2-(1+12i)z-(13+9i)=0$

10) $z^2+2\bar{z}+5=0$

11) $z\bar{z}^2+6z+11=0$

12) $z^4-(5-2i)z^2-10i=0$

13) $z^2-2\bar{z}+1=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{C}$:

1) $z^2 = -10i$

E_1) $z = a+bi \Rightarrow z^2 = (a+bi)^2 = a^2+2abi+b^2i^2$

E_2) $i^2 = -1 \Rightarrow$ ec devine:

$$a^2+2abi-b^2 = -10i$$

E_3) $\begin{cases} a^2-b^2 = 0 \\ 2ab = -10 \mid :2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ ab = -5 \end{cases}$

$b = ta$

E_4) sist. omogen,

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-t^2a^2 = 0 \\ a^2t = -5 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2(1-t^2)}{a^2t} = 0$

$\Rightarrow 1-t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$

E_5) $t = 1$ înlocuim în $a^2t = -5 \Rightarrow a^2 = -5$ k.o.

deci $a \in \mathbb{R}$

E_6) $t = -1$ înlocuim în $a^2t = -5 \Rightarrow -a^2 = -5$

$\Rightarrow a^2 = 5 \Rightarrow a = \pm\sqrt{5}$

E_7) $a = \sqrt{5}$ și $b = ta \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -\sqrt{5}$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{5}-\sqrt{5}i}$

$a = -\sqrt{5}$ și $b = ta \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \boxed{z_2 = -\sqrt{5}+\sqrt{5}i}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $z^2 = 8-6i$

E_1) Notăm $z = a+bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$

E_2) $z^2 = 8-6i \Rightarrow (a+bi)^2 = 8-6i \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+2abi-b^2 = 8-6i$

E_3) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \mid :2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 8 \\ ab = -3 \end{cases}$

E_4) este sistem omogen, notăm $b = t \cdot a$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-t^2a^2 = 8 \\ a \cdot ta = -3 \end{cases} \Rightarrow$ împărțire $\frac{a^2(1-t^2)}{a^2 t} = -\frac{8}{3}$

$\Rightarrow 3(1-t^2) = -8t \Rightarrow 3-3t^2 = -8t \Rightarrow$

$\Rightarrow 3t^2-8t-3 = 0, \; t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{6} \begin{cases} t_1 = \frac{18}{6} = 3 \\ t_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

E_5) $t_1 = 3$, înlocuim în $a^2 t = -3 \Rightarrow a^2 \cdot 3 = -3$

$\Rightarrow a^2 = -1$ și cum $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ contradicție

E_6) $t_2 = -\frac{1}{3}$, înlocuim în $a^2 t = -3 \Rightarrow a^2 \cdot (-\frac{1}{3}) = -3$

$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$, înlocuim în $b = ta \Rightarrow b = -\frac{1}{3}a$

$a_1 = 3$ și $b = -\frac{1}{3}a \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z_1 = 3-i$

$a_2 = -3$ și $b = -\frac{1}{3}a \Rightarrow b = 1 \Rightarrow z_2 = -3+i$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $(1+i)z^2+(i-6)z+2-3i=0$

$E_1)\ z_{1,2}=\dfrac{-(i-6)\pm\sqrt{(i-6)^2-4(1+i)(2-3i)}}{2(1+i)}$

$E_2)\ \Delta=(i-6)^2-4(1+i)(2-3i)=i^2-12i+36-4(2-3i+2i+3)=$

$=i^2-12i+36-20+4i=i^2-8i+16=(i-4)^2$

$E_3)\ z_{1,2}=\dfrac{-i+6\pm(i-4)}{2(1+i)}$

$\dfrac{-i+6+i-4}{2(1+i)}=\dfrac{\cancel{2}^{1-i}}{\cancel{2}(1+i)}=\dfrac{1-i}{2}$

$\dfrac{-i+6-i+4}{2(1+i)}=\dfrac{10-2i}{2(1+i)}=\dfrac{\cancel{5-i}^{1-i}}{\cancel{1+i}}=$

$=\dfrac{(5-i)(1-i)}{1-i^2}=\dfrac{5-6i+1}{2}=3-3i$

Obs.: dacă nu am fi fost deștepți, atunci

$\Delta=i^2-8i+16=15-8i=(m+ni)^2=m^2+2mni-n^2$

$\Rightarrow\begin{cases}m^2-n^2=15\\ 2mn=-8\ |:2\end{cases}$ sist omogen, notăm $n=tm$

și înlocuim $\Rightarrow\begin{cases}m^2-t^2m^2=15\\ tm^2=-4\end{cases}$

împărțim $\Rightarrow\dfrac{m^2(1-t^2)}{tm^2}=\dfrac{15}{-4}\Rightarrow -4(1-t^2)=15t$

$\Rightarrow -4+4t^2=15t\Rightarrow 4t^2-15t-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{225+64}}{2\cdot 4}=\dfrac{15\pm\sqrt{289}}{8}=\dfrac{15\pm 17}{8}\begin{cases}\frac{32}{8}=4\\ -\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}\end{cases}$

$t_1=4\Rightarrow tm^2=-4\Rightarrow 4m^2=-4\Rightarrow m^2=-1$ K.O.

$t_2=-\frac{1}{4}\Rightarrow tm^2=-4\Rightarrow -\frac{1}{4}m^2=-4\Rightarrow m^2=16\Rightarrow\begin{cases}m=4\Rightarrow n=-1\\ m=-4\Rightarrow n=1\end{cases}$

$\Rightarrow\Delta=(4-i)^2$ sau $\Delta=(-4+i)^2$ și vorbeam ca sus

Rezolvați: $2iz^2+3(1+i)z+3-i=0$

$E_1)$ $z_{1,2}=\dfrac{-3(1+i)\pm\sqrt{9(1+i)^2-8i(3-i)}}{4i}=$

$=\dfrac{(-3-3i)\pm\sqrt{9+18i+9i^2-24i-8}}{4i}=$

$=\dfrac{(-3-3i)\pm\sqrt{9i^2-6i+1}}{4i}$

$E_2)$ $z_{1,2}=\dfrac{(-3-3i)\pm\sqrt{(3i-1)^2}}{4i}$

$z_{1,2}=\dfrac{(-3-3i)\pm(3i-1)}{4i}$ $\begin{cases} z_1=-\dfrac{4}{4i}=-\dfrac{1}{i}=-\dfrac{i}{i^2}=i \\ z_2=\dfrac{-6i-2}{4i}=\dfrac{-6i^2-2i}{4i^2}= \end{cases}$

$=\dfrac{6-2i}{-4}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$E_3)$ $z\in\left\{i;\ -\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația:

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$$

E_1) $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z^2 = a^2 + 2abi - b^2$

E_2) ecuația: $a^2 + 2abi - b^2 - 2(a - bi) + 1 = 0$

$\Rightarrow a^2 - b^2 - 2a + 1 + (2ab + 2b)i = 0$

E_3) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \\ 2b(a+1) = 0 \end{cases}$

E_4) Caz I: $b = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$

$\Rightarrow z_1 = 1 + 0 \cdot i = 1$

Caz II: $a = -1 \Rightarrow 1 - b^2 + 2 + 1 = 0$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow z_2 = -1 + 2i$

$z_3 = -1 - 2i$

Prof. Ovidiu Băluescu