Data:

CLASA A X-A

SETUL 4
GEOMETRIE X

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar

REPER CARTEZIAN

COORDONATELE PUNCTELOR

ECUAȚII ALE DREPTEI

DREPTE PARALELE, DREPTE PERPENDICULARE

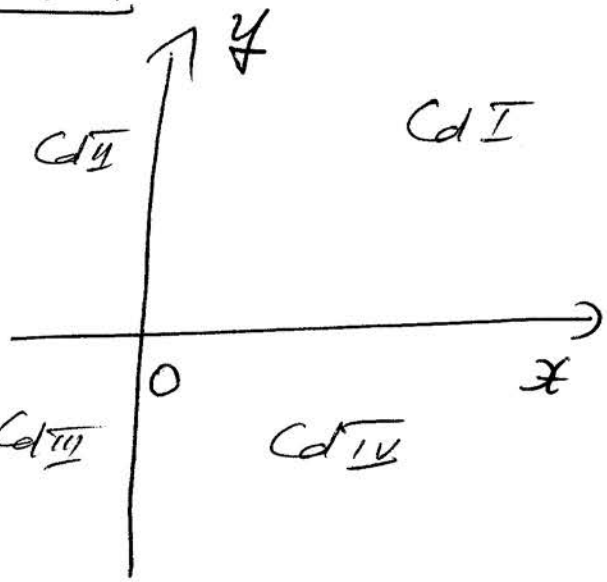
ECUAȚIILE LINIILOR IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

ECUAȚIILE SIMETRICELOR

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

REPER CARTEZIAN



1) reperul cartezian Oxy este format din 2 axe de coordonate perpendiculare,

2) axa absciselor notată Ox

axa ordonatelor notată Oy

3) există 4 cadrane

$M \in Cd\,I \Leftrightarrow \begin{cases} x_M > 0 \\ y_M > 0 \end{cases}$	$M \in Cd\,II \Leftrightarrow \begin{cases} x_M < 0 \\ y_M > 0 \end{cases}$
$M \in Cd\,III \Leftrightarrow \begin{cases} x_M < 0 \\ y_M < 0 \end{cases}$	$M \in Cd\,IV \Leftrightarrow \begin{cases} x_M > 0 \\ y_M < 0 \end{cases}$

4) $M \in Ox \Rightarrow y_M = 0$

$M \in Oy \Rightarrow x_M = 0$

Exp.: Găsiți coordonatele punctului M de pe axa absciselor dacă $|x_M| = 3$

$E_1)$ $M \in Ox \Rightarrow y_M = 0$

$E_2)$ $|x_M| = 3 \Rightarrow x_M = \pm 3$

$E_3)$ $\Rightarrow M_1(3;0)$ și $M_2(-3;0)$

DISTANȚA ÎNTRE DOUĂ PUNCTE
(LUNGIMEA UNUI SEGMENT)

Dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$

$$\Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Obs.: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exp.: $m = ?$ dacă distanța între A și B este 4 unde $A(2, m)$ și $B(m, -2)$

$E_1)$ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(m-2)^2 + (-2-m)^2}$

$AB = \sqrt{m^2 - 4m + 4 + 4 + 4m + m^2}$

$AB = \sqrt{2m^2 + 8}$

$E_2)$ dar, $AB = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2m^2+8} = 4 \mid ()^2$

$2m^2 + 8 = 16 \Rightarrow 2m^2 = 8$

$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$

COORDONATELE PUNCTELOR CLASICE

MIJLOCUL SEGMENTULUI AB

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

CENTRUL DE GREUTATE AL TRIUNGHIULUI ABC

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

PUNCTUL CE IMPARTE UN SEGMENT IN RAPORT DAT K

Dacă $\frac{BM}{MC} = k \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{1+k} x_B + \dfrac{k}{1+k} x_C \\ y_M = \dfrac{1}{1+k} y_B + \dfrac{k}{1+k} y_C \end{cases}$$

Dacă $\frac{CM}{MB} = k \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{1+k} x_C + \dfrac{k}{1+k} x_B \\ y_M = \dfrac{1}{1+k} y_C + \dfrac{k}{1+k} y_B \end{cases}$$

Ex 1: $A(2;6)$, $B(4;-18)$, se cer coord lui M, mijl lui AB

E_1)
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6-18}{2} = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(3;-3)$

Ex 2: Fie G centrul de greutate al ΔABC, găsiți coord lui C dacă $A(1;3)$, $B(-4;2)$, $G(1;4)$

E_1)
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1-4+x_C}{3} \Rightarrow 3 = -3 + x_C \Rightarrow x_C = 6 \\ 4 = \dfrac{3+2+y_C}{3} \Rightarrow 12 = 5 + y_C \Rightarrow y_C = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow C(6;7)$

Ex 3: Dacă $B(1;4)$, $C(-5;7)$ și $\frac{BM}{MC} = 2$, se cer coord lui M

E_1)
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{1+k} x_B + \dfrac{k}{1+k} x_C \\ y_M = \dfrac{1}{1+k} y_B + \dfrac{k}{1+k} y_C \end{cases}$$

E_2)
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{1+2} \cdot 1 + \dfrac{2}{1+2} \cdot (-5) \\ y_M = \dfrac{1}{1+2} \cdot 4 + \dfrac{2}{1+2} \cdot 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{3} - \dfrac{10}{3} \Rightarrow x_M = -3 \\ y_M = \dfrac{4}{3} + \dfrac{14}{3} \Rightarrow y_M = 6 \end{cases} \Rightarrow M(-3;6)$$

PANTA LINEI DREPTE

- semnifică orientarea acelei drepte față de orizontală, se notează m_d

Avem situațiile:

$d: ax+by+c=0 \Rightarrow m_d = -\frac{a}{b}$

$M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2) \Rightarrow m_{M_1M_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

știm φ, unghiul cu $Ox \Rightarrow m_d = tg\,\varphi$

$d: y=mx+n \Rightarrow m_d = m$

Obs.: dacă o dreaptă nu are pantă $\Rightarrow d \perp Ox$ și atunci toate punctele dreptei d au proprietatea că au același x și astfel vom găsi ecuația dreptei cerute

Exp 1: Fie $d: 2x+3y+4=0$, se cere panta dreptei d

$m_d = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_d = -\frac{2}{3}$

Exp 2: Fie $M_1(1,2)$, $M_2(3,5)$

$\Rightarrow m_{M_1M_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$

Exp 3: Găsiți panta dreptei d dacă face cu Ox un unghi $\varphi = 45^\circ$

$m_d = tg\,\varphi = tg\,45^\circ = 1$

Exp 4: Găsiți panta dreptei $d: y=4x+1$

Pentru dreapta $d: y=mx+n \Rightarrow m_d = m$

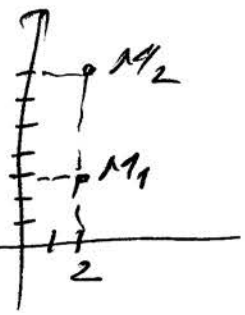
În cazul nostru, $m_d = 4$

Exp 5: $M_1(2,3)$, $M_2(2,7)$

$\Rightarrow m_d = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-3}{2-2} = \frac{4}{0}$

$\Rightarrow \nexists\, m_d$

În acest caz, toate punctele de pe dreapta M_1M_2 au $x=2$



CALCULUL UNUI DETERMINANT DE ORDIN 3 (III)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

Obs. i toate produsele de termeni paraleli cu diagonala principală \ se iau cu semnul plus, iar toate produsele de termeni paraleli cu diagonala secundară / se iau cu semnul minus

Exp.: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 5 + 4\cdot 2\cdot(-1) - (-1)\cdot(-3)\cdot 5 - 2\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 1$$

$$= -3 + 20 - 8 - 15 - 8 - 4 = 9 - 27 = -18$$

Exp. 2: găsiți $a = ?$ dacă $\begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2a - 4$

E_1) $\begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 5 + a\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot(-1) - 3\cdot a\cdot 5 =$

$$= 20 + 4a + 0 - 0 + 2 - 15a =$$

$$= 22 - 11a$$

E_2) $\begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2a - 4 \Rightarrow 22 - 11a = 2a - 4$

$$\Leftrightarrow 26 = 13a \rightarrow a = \frac{26}{13} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

DETERMINAREA ECUAȚIEI UNEI DREPTE CE TRECE PRINTR-UN PUNCT ȘI ARE PANTĂ CUNOSCUTĂ

Dacă știm $M(x_1, y_1)$ și panta dreptei notată cu m

$\Rightarrow$ ec. dreptei este

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Exp1: Găsiți ec. unei drepte ce trece prin $M(2;3)$ și are panta $m_d = 4$

E_1) ec. este $y - y_1 = m(x - x_1)$

E_2) $y - 3 = 4(x-2) \Rightarrow y - 3 = 4x - 8$

$\Rightarrow 4x - y - 5 = 0$

Exp2: Găsiți ec. unei drepte ce trece prin $M(-1;2)$ și face cu Ox un unghi de $45°$

E_1) ec. este $y - y_1 = m(x - x_1)$

E_2) d face cu Ox un unghi de $45° \Rightarrow$

$\Rightarrow m_d = \operatorname{tg} \ell \Rightarrow m_d = \operatorname{tg} 45° = 1$

E_3) ec. este $y - 2 = 1(x+1) \Rightarrow y - 2 = x + 1$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0$

ECUAȚIA UNEI DREPTE CE TRECE PRIN 2 PUNCTE $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$

- există mai multe metode, metoda generală este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

unde formula pentru determinant de ord III este:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - dbi - hfa$$

Obs: alte metode (dar eu nu le recomand)

mod II: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

mod III: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Exp.: Găsiți ecuația dreptei ce trece prin $M_1(2,3)$ și $M_2(1,5)$

E_1) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$3x + y + 10 - 3 - 5x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow -2x - y + 7 = 0 \mid \cdot(-1)$

$2x + y - 7 = 0$

ECUAȚIA UNEI DREPTE CE TRECE PRIN ORIGINE

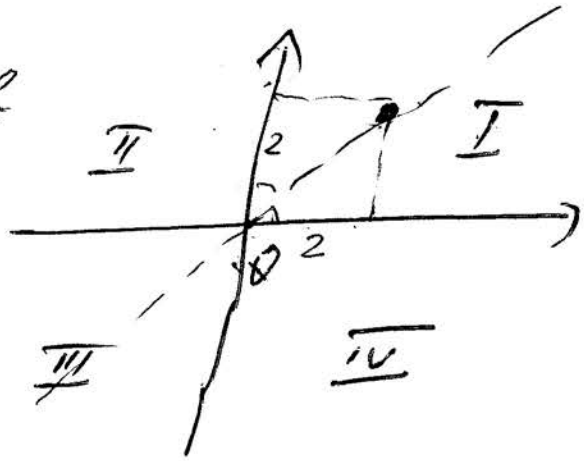
a) ec. dreptei ce trece prin origine este

$y - 0 = m(x-0)$ adică $\boxed{y = mx}$

pt că originea $O(0,0)$

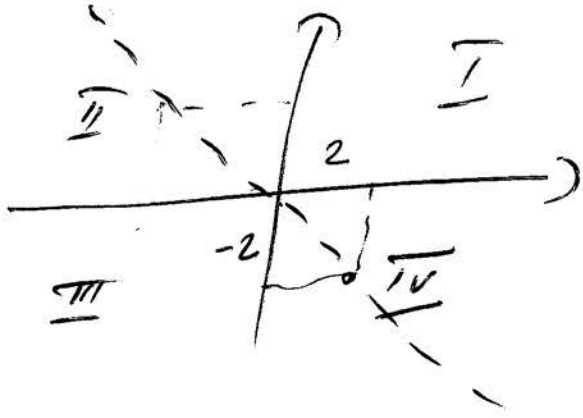
b) ec. primei bisectoare

$y = x$



c) ec. bisectoarei II

$y = -x$



Exp.: Găsiți ec. unei drepte ce trece prin origine și care face cu Ox un unghi de 120°

E_1) ec. este $y - 0 = m(x-0)$ cu $m = tg\,120°$

E_2) $tg\,120° = tg\,(60°+60°) = \dfrac{tg\,60° + tg\,60°}{1 - tg\,60° tg\,60°} = \dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2}$

$\Rightarrow tg\,120° = -\sqrt{3}$

... este $y - 0 = -\sqrt{3}(x-0) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}x + y = 0}$

CONDIȚIA CA 3 PUNCTE A, B, C SĂ FIE COLINIARE

- există mai multe metode, metoda generală este:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

unde formula pentru determinant de ord III este:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - hfa$$

Obs.: ∃ alte metode (dar eu nu le recomand):

met II: găsim ecuația dreptei ce trece prin 2 puncte apoi verificăm dacă cel de-al treilea punct este pe acea dreaptă

met III: se arată că $m_{AB} = m_{BC}$

Ex: $A(1,2), B(0,3), C(3,a)$

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă punctele A, B, C sunt coliniare

E1) ar trebui $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 + 6 + 0 - 9 - a - 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

ARIA UNUI ΔABC DACĂ ȘTIM COORDONATELE

(N1)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,|\Delta| \quad \text{unde} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

(adică $\frac{1}{2}\cdot$(modul din Δ))

Obs.: regula de calcul a determinantului de ordin 3 este $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+bfg+dhc-gec-bdi-afh$

Exp.: Calculați $\mathcal{A}_{\Delta ABC}$ dacă $A(1;-2)$, $B(2;-1)$, $C(3;4)$

$E_1)$ $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

$E_2)$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1-6+8+3-4+4 = 4$

$E_3)$ $\Delta = 4 \Rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot|4| = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

Obs 2: $\mathcal{A} = \frac{\text{baza}\cdot\text{înălț}}{2}$ și înălțimea o calculăm ca distanța de la A la BC, dar e $\int$ lungă metoda

DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ

$M(x_M, y_M)$ și $d: ax+by+c=0$

se cere: distanța de la M la d

$$dist(M,d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemplu: $M(-1;2)$ și $d: 3x-4y+5=0$

$dist(M,d) = ?$

$$E_1)\ dist(M,d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$E_2)\ dist(M,d) = \frac{|3(-1)-4\cdot 2+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{|-3-8+5|}{\sqrt{25}} = \frac{|-6|}{5} = \frac{6}{5}$$

ECUAȚIA UNEI DREPTE PARALELE (N2) (PERPENDICULARE) CU AXELE DE COORDONATE

Ec. unei drepte paralele cu $x=a$ este $x=b, \forall b \neq a$

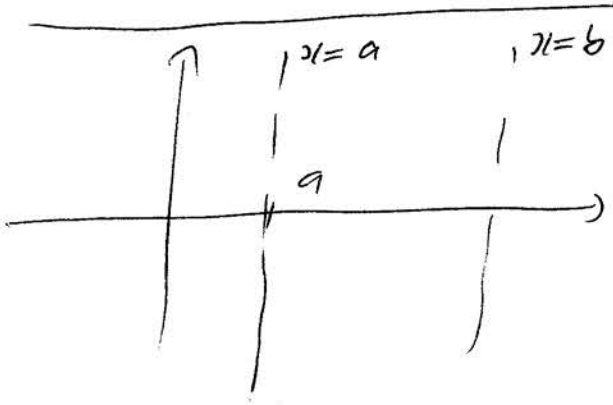
Ec unei drepte paralele cu Oy este $x=a, \forall a \neq 0$

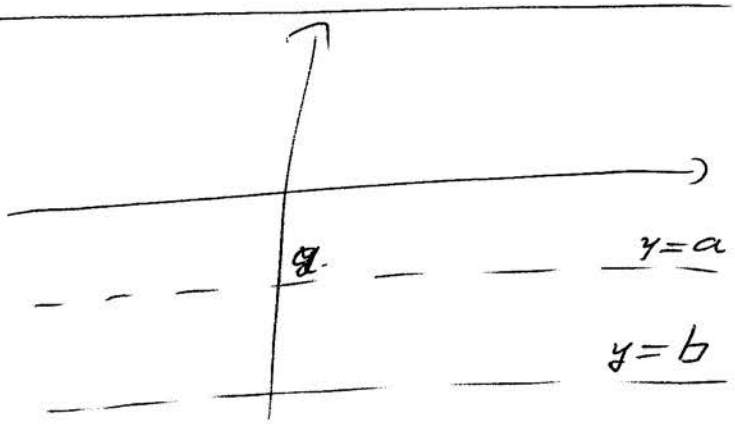
Ec unei drepte perpendiculare pe Oy este $y=a, \forall a \in \mathbb{R}$

Ec. unei drepte paralele cu $y=a$ este $y=b, \forall b \neq a$

Ec unei drepte paralele cu Ox este $y=a, \forall a \neq 0$

Ec unei drepte perpendiculare pe Ox este $x=a, \forall a \in \mathbb{R}$





Exp: găsiți ec dreptei: a) $\parallel$ cu Oy ce trece $A(1;4)$

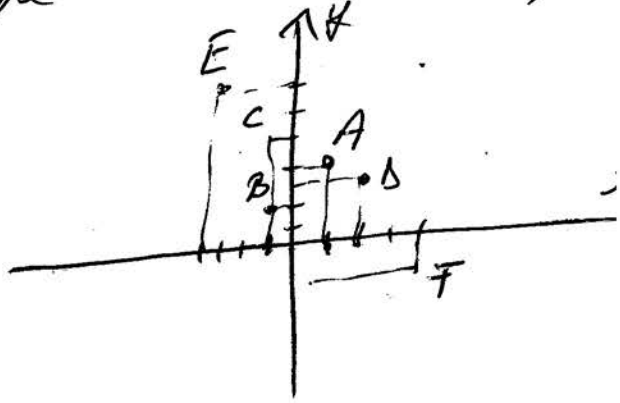
b) $\parallel$ cu Ox ce trece prin $B(-1;2)$

c) $\perp$ pe Oy ce trece $C(-1;5)$

d) $\perp$ pe Ox ce trece $D(2;3)$

e) $\parallel$ cu $x=3$ ce trece $E(-4;7)$

f) $\perp$ pe $x=3$ ce trece $F(4;-1)$



a) $x=x_A \Rightarrow x=1$

b) $y=y_B \Rightarrow y=2$

c) $y=y_C \Rightarrow y=3$

d) $x=x_D \Rightarrow x=2$

e) $x=x_E \Rightarrow x=-4$

-1

PUNCTE ALE DREPTELOR. INTERSECȚII ALE DREPTELOR

1) Un punct aparține unei drepte $\Leftrightarrow$ coordonatele sale verifică ecuația dreptei

2) Determinarea unui punct situat pe o dreaptă $\Leftrightarrow$ dăm lui x o valoare oarecare și găsim y (sau dăm lui y o valoare oarecare și găsim x)

3) Intersecția a două drepte $\Leftrightarrow$ rezolvăm sistemul format din ecuațiile lor

4) Intersecția unei drepte cu axele de coordonate

$d \cap Oy$: $x=0$ și găsim $y \Rightarrow A(0,\dots)$

$d \cap Ox$: $y=0$ și găsim $x \Rightarrow B(\dots,0)$

Ex 1: Verificați dacă $A(1;2)$ și $B(-1;2)$ aparțin lui $d: 3x+y+1=0$

E1) $A \in d$ (?): $3\cdot 1+2+1=0 \Leftrightarrow 6=0$ K.O.

$\Rightarrow A \notin d$

E2) $B \in d$ (?): $3\cdot(-1)+2+1=0 \Leftrightarrow 0=0$

OK $\Rightarrow B \in d$

Ex 2: Găsiți două puncte ale dreptei $d: 2x+5y-14=0$

$x=0 \Rightarrow 5y=14 \Rightarrow y=\frac{14}{5} \Rightarrow A(0;\frac{14}{5})$

$x=1 \Rightarrow 2+5y-14=0 \Rightarrow y=\frac{12}{5} \Rightarrow B(1;\frac{12}{5})$

Ex 3: Găsiți pct de intersecție pt $d_1: 2x+y-4=0$ și $d_2: x-3y+5=0$

E1) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-3y=-5 \end{cases} \Big| \cdot 3$

„+": $7x = 7 \Rightarrow x=1$

Înlocuim în $2x+y=4 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow M(1;2) \in d_1 \cap d_2$

Ex 4: Găsiți punctele de intersecție cu axele pt $d: 2x-y+4=0$

E1) $\cap Oy$: $x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow A(0;4)$

$\cap Ox$: $y=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow B(-2;0)$

POZIȚIILE A DOUĂ DREPTE

1) $\boxed{d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2}$ (DREPTE PARALELE)

2) $\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1}$ (DREPTE PERPENDICULARE)

3) $\boxed{d_1 \text{ și } d_2 \text{ CONCURENTE} \Leftrightarrow m_1 \neq m_2}$

4) $\boxed{d_1 \text{ COINCIDE cu } d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

Exemplu 1: $a = ?$ dacă $d_1 \parallel d_2$ pt

$d_1: 2x + (a-1)y = 5$

$d_2: 4x + 6y = 2$

E1) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

E2) $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{a-1}$

$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

E3) $m_1 = m_2 \Leftrightarrow -\frac{2}{a-1} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$6 = 2(a-1) \Leftrightarrow 3 = a-1 \Leftrightarrow \boxed{a = 4}$

Exemplu 2: $a = ?$ dacă $d_1 \perp d_2$ pt

$d_1: 2x + 4y = 5$

$d_2: (a-2)x + 3y = 4$

E1) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

E2) $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{a-2}{3}$

E3) $m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{a-2}{3} = -1$

$\Leftrightarrow a - 2 = -6 \Leftrightarrow \boxed{a = -4}$

Exemplu 3: $m = ?$ dacă d_1 și d_2 concurente

pt $d_1: 3x + y - 5 = 0$

$d_2: mx + 3y + 8 = 0$

E1) ar trebui ca $m_1 \neq m_2$

E2) $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{1} = -3$

$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{m}{3}$

E3) $m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow -3 \neq -\frac{m}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \neq 9 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$

Exemplu 4: $m = ?$ dacă d_1 și d_2 coincid

pt $d_1: 2x + 4y + 6 = 0$

$d_2: mx + 2y + 3 = 0$

E1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

E2) $\frac{2}{m} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{m} = 2$

$\Leftrightarrow m = 1$

Exemplu 5: $m = ?$ dacă d_1 și d_2 coincid

pt $d_1: 2x + 4y + 5 = 0$

$d_2: mx + 2y + 3 = 0$

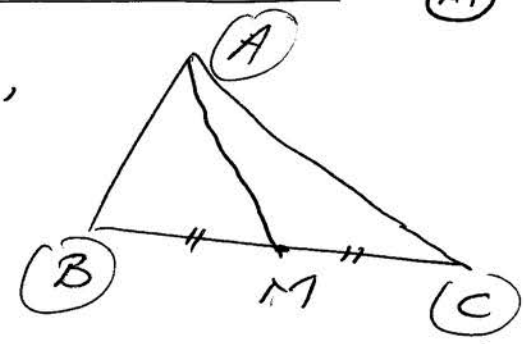
E1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{4}{2} = \frac{5}{3}$ și cum $\frac{4}{2} \neq \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \nexists m \in \mathbb{R}$ pt care d_1, d_2 coincid

DETERMINAREA ECUAȚIEI MEDIANEI (11)

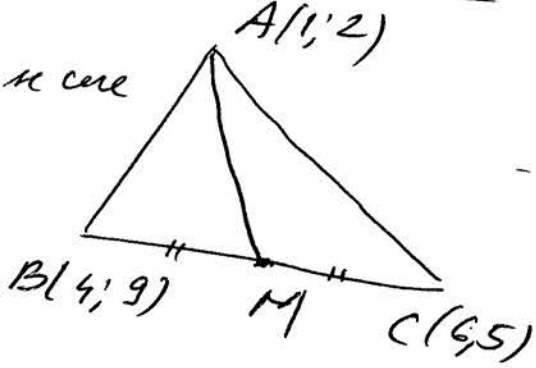
se știu coordonatele lui A, B și C,
se cere ec. mediânei din A



E_1) M mijl lui BC $\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ coordonatele lui M

E_2) știm coordonatele lui A, știm coordonatele lui M $\Rightarrow$
ec. AM o găsim din $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ex.: Fie A(1;2), B(4;9), C(6;5), se cere ecuația mediânei din A



E_1) M mijl lui BC $\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{4+6}{2} = 5 \\ y_M = \frac{9+5}{2} = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow M(5;7)$

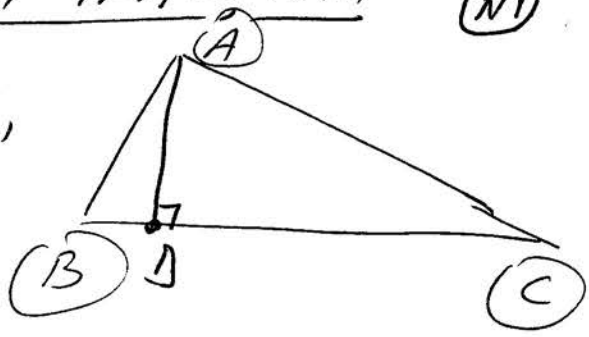
E_2) știm A(1;2), M(5;7) $\Rightarrow$ ec. AM: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2x + 7 + 5y - 10 - 7x - y = 0$

$-5x + 4y - 3 = 0 \Rightarrow 5x - 4y + 3 = 0$

DETERMINAREA ECUAȚIEI ÎNĂLȚIMII (N1)

Se știu coordonatele lui A, B, C, se cere ecuația înălțimii din A

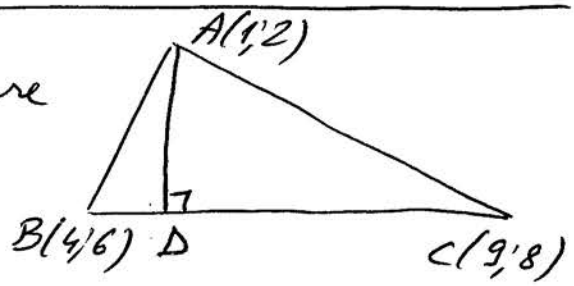


E_1) $AD \perp BC \Rightarrow m_{AD} \cdot m_{BC} = -1$

E_2) $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \Rightarrow m_{AD} = -\frac{1}{m_{BC}} \Rightarrow$ găsim m_{AD}

E_3) Știm coordonatele lui A, știm $m_{AD} \Rightarrow$ ecuația lui AD este $y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$

Exemplu: Fie A(1;2), B(4;6), C(9;8), se cere ecuația înălțimii din A



E_1) $AD \perp BC \Rightarrow m_{AD} \cdot m_{BC} = -1$

E_2) $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{8-6}{9-4} = \frac{2}{5}$

E_3) $m_{AD} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AD} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$

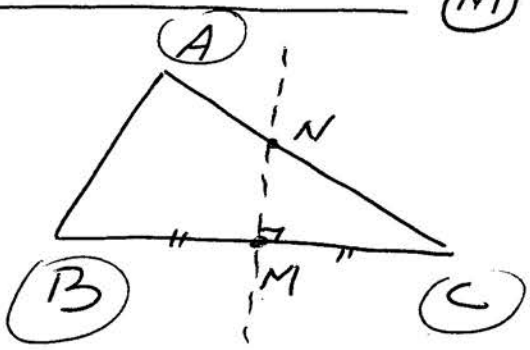
E_4) știm A(1;2) $\Rightarrow$ ec. AD: $y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$

$\Rightarrow y - 2 = -\frac{5}{2}(x-1) \mid \cdot 2$

$2y - 4 = -5(x-1) \Rightarrow 2y - 4 = -5x + 5$

$\Rightarrow 5x + 2y - 9 = 0$

DETERMINAREA ECUAȚIEI MEDIATOAREI (N1)



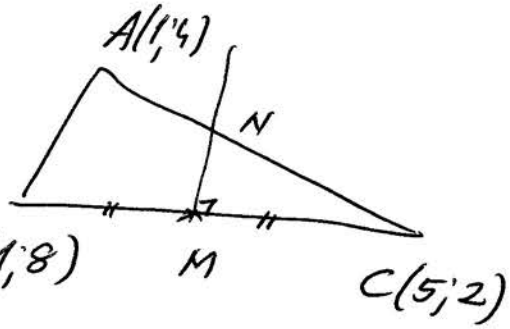
Se știu coordonatele lui A, B, C, se cere ecuația mediatoarei lui BC

E_1) MN mediatoare $\Rightarrow MN \perp BC$ și M este mijlocul lui BC, din $MN \perp BC \Rightarrow m_{MN} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{MN} = -\frac{1}{m_{BC}}$

E_2) $\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow$ coordonatele lui M

E_3) Știm m_{MN}, știm coordonatele lui M $\Rightarrow$ ec. MN este

$$y - y_M = m_{MN}(x - x_M)$$



Ex: Fie A(1;4), B(1;8), C(5;2). Găsiți ecuația mediatoarei lui BC

E_1) MN mediatoare $\Rightarrow MN \perp BC$ și M mijl lui BC

E_2) $MN \perp BC \Rightarrow m_{MN} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{MN} = -\frac{1}{m_{BC}}$

E_3) $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-8}{5-1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_{MN} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

E_4) M mijlocul lui BC $\rightarrow$ $\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8+2}{2} = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow M(3;5)$

E_5) ec. MN: $y - y_M = m_{MN}(x - x_M) \Rightarrow y - 5 = \frac{2}{3}(x-3) \mid \cdot 3$

$3y - 15 = 2(x-3) \Rightarrow 3y - 15 = 2x - 6$

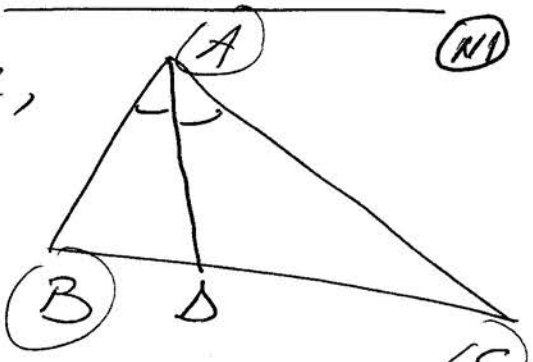
$\Rightarrow 2x - 3y + 15 - 6 = 0$

$2x - 3y + 9 = 0$

DETERMINAREA ECUAȚIEI BISECTOAREI

(N1)

se știu coordonatele lui A, B și C,
se cere ec. bisectoarei din A



E_1) $AΔ$ bisect $\xrightarrow{T.\text{bisect}}$ $\frac{AB}{AC}=\frac{BΔ}{ΔC}$

E_2) se calc. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$, $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$

se obține $\frac{BΔ}{ΔC}=k$, o valoare cunoscută

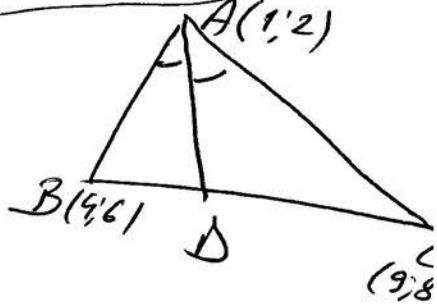
E_3) din împărțirea în raport $k \Rightarrow \begin{cases} x_Δ=\frac{1}{1+k}x_B+\frac{k}{1+k}x_C \\ y_Δ=\frac{1}{1+k}y_B+\frac{k}{1+k}y_C \end{cases}$

$\Rightarrow$ cunoaștem coordonatele lui Δ

E_4) știm A, știm Δ, folosim ec. dreptei ce trece prin două puncte

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_Δ & y_Δ & 1 \end{vmatrix}=0$$

Exp: Fie A(1;2), B(4;6), C(9;8), se cere ecuația bisectoarei din A



E_1) $AΔ$ bisectoare $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BΔ}{ΔC}$;

E_2) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=5$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(9-1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{64+36}=10$

E_3) $\frac{AB}{AC}=\frac{BΔ}{ΔC} \Rightarrow \frac{BΔ}{ΔC}=\frac{5}{10} \Rightarrow \frac{BΔ}{ΔC}=\frac{1}{2}=k$

E_4) $x_Δ=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x_B+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}x_C=\frac{2}{3}x_B+\frac{1}{3}x_C=\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 9=\frac{17}{3}$

$y_Δ=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}y_B+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}y_C=\frac{2}{3}y_B+\frac{1}{3}y_C=\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{20}{3}$

$\Rightarrow Δ\left(\frac{17}{3};\frac{20}{3}\right)$ $\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2x+\frac{20}{3}+\frac{17y}{3}-$ $\quad AB: \frac{6x+20+17y-34-20x-}{3}$

$\Rightarrow -14x+14y-14=0$

DETERMINAREA SIMETRICULUI UNUI PUNCT FAȚĂ DE UN PUNCT (N1)

Se știe A și B, se cer coordonatele simetricului lui A față de B, notat A'

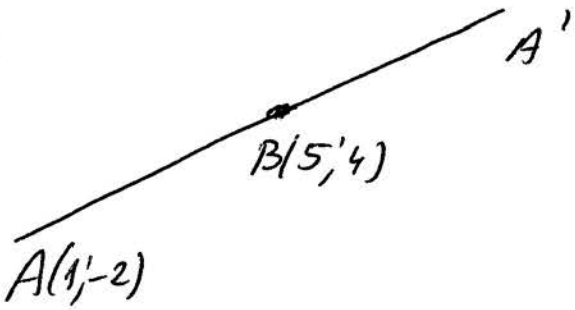


E_1) B mijlocul lui AA' $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases}$$

E_2) se înlocuiesc coordonatele lui A și B, se găsesc coordonatele lui A' astfel: $\begin{cases} x_{A'} = 2x_B - x_A \\ y_{A'} = 2y_B - y_A \end{cases}$ (nu se memorează, se deduc)

Exemplu: Fie A(1;-2), B(5;4), se cer coordonatele simetricului lui A față de B



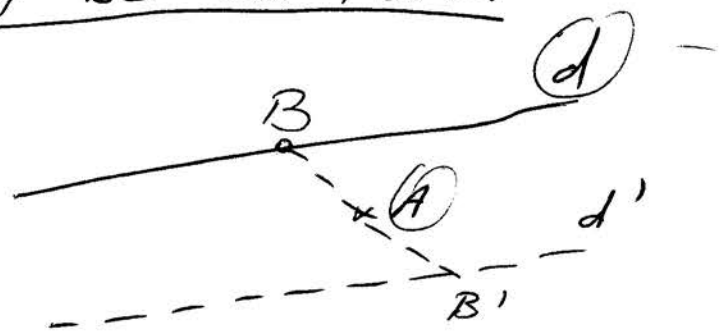
E_1) notăm cu A' simetricul lui A față de B $\Rightarrow$ B mijlocul lui AA'

E_2) $\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = \frac{1 + x_{A'}}{2} \\ 4 = \frac{-2 + y_{A'}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10 = 1 + x_{A'} \Rightarrow x_{A'} = \\ 8 = -2 + y_{A'} \Rightarrow y_{A'} = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow A'(9;10)$

DETERMINAREA SIMETRICEI UNEI DREPTE FAȚĂ DE UN PUNCT (N2)

se știe ec. lui d, se știe coord lui A, se cere ec. lui d'

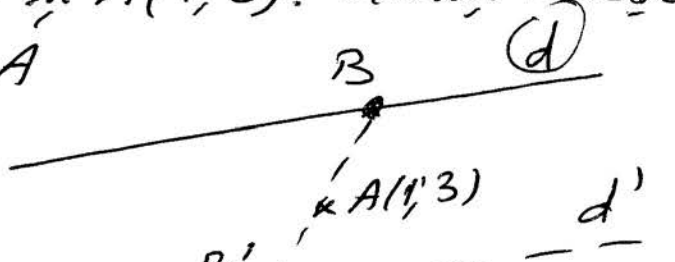


E_1) $d \parallel d' \Rightarrow m_d = m_{d'}$ iar $m_d = -\frac{a}{b}$

E_2) Fie $B \in d$ (dăm lui x o valoare, găsim y) și găsim coord lui B' folosind că A mijl lui BB'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'} \\ y_A = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'} \end{cases}$$

Ex 1.: Fie $d: 2x - y + 5 = 0$ și $A(1;3)$. Găsiți ecuația simetricei lui d față de A



E_1) $d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = m_d$

E_2) $m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-1} = 2 \Rightarrow m_{d'} = 2$

E_3) Fie $B \in d$, considerăm $x_B = 0 \Rightarrow -y + 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

$\Rightarrow B(0;5)$

E_6) A mijl lui BB' $\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \\ y_A = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{0 + x_{B'}}{2} \\ 3 = \frac{5 + y_{B'}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{B'} = 2$

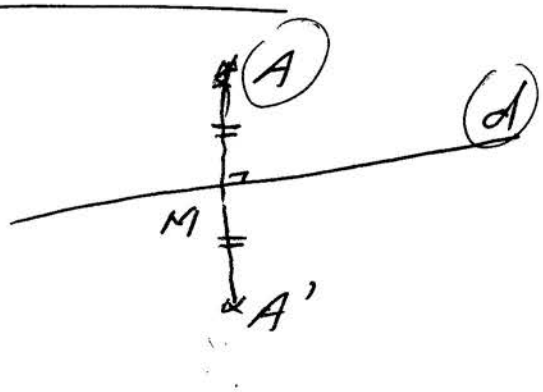
$y_{B'} = 1 \Rightarrow B'(2;1)$

E_7) Știm $B'(2;1)$, știm $m_{d'} = 2 \Rightarrow$ ec. d': $y - 1 = 2(x - 2)$

$\Rightarrow y - 1 = 2x - 4 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$

DETERMINAREA SIMETRICULUI UNUI PUNCT FAȚĂ DE O DREAPTĂ

(Nr 2)



Se știu coordonatele lui A și ecuația dreptei d, se cer coordonatele simetricului lui A față de d

---

E_1) pt a găsi simetricul față de d, construim perpendiculara din A pe d și o prelungim cu un segment congruent

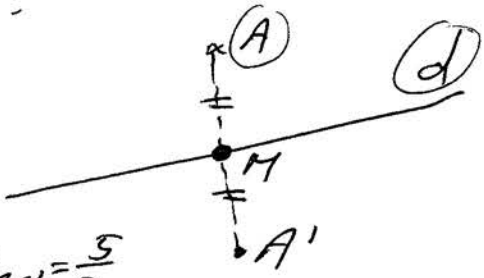
E_2) $AA' \perp d \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_d = -1$, $m_d = -\frac{a}{b} \Rightarrow$ găsim $m_{AA'}$

E_3) știm A, știm $m_{AA'} \Rightarrow$ ec. AA': $y - y_A = m_d(x - x_A) \Rightarrow$ ec. AA'

E_4) $AA' \cap d = \{M\}$, rezolvăm sistemul format din ec. celor două drepte

E_5) M mijl lui $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} \\ y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} \end{cases}$

Exp 2: Fie $A(1;5)$, $d: 2x + y - 5 = 0$, găsiți coordonatele simetricului lui A față de d



E_1) $AA' \perp d \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_d = -1$

E_2) $d: 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{5} \Rightarrow m_{AA'} = \frac{5}{2}$

E_3) $A(1;5)$, $m_{AA'} = \frac{5}{2} \Rightarrow$ ec. AA': $y - y_{A'} = m_{AA'}(x - x_{A'}) \Rightarrow$

$y - 5 = \frac{5}{2}(x - 1) \mid \cdot 2 \Rightarrow 2y - 10 = 5x - 5 \Rightarrow 5x - 2y + 5 = 0$

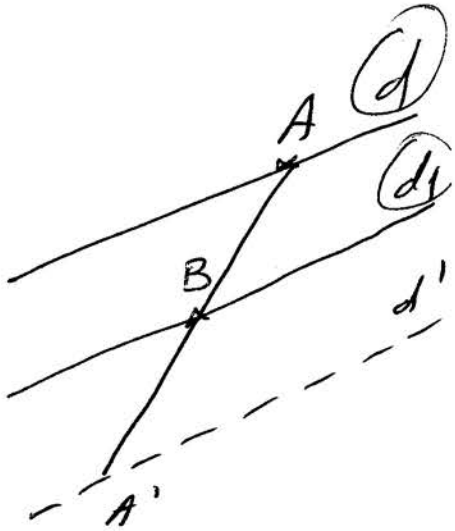
E_4) ca să găsim M, $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases} \mid \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow 9x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow 2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - \frac{10}{9} \Rightarrow y = \frac{35}{9} \Rightarrow M\left(\frac{5}{9}; \frac{35}{9}\right)$

E_5) M mijl $AA' \mid \frac{5}{9} = \frac{1 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = \frac{10}{9} - 1 \Rightarrow x_{A'} = \frac{1}{9}$ $A'\left(\frac{1}{9}; \frac{25}{9}\right)$

DETERMINAREA SIMETRICEI UNEI DREPTE FAȚĂ DE O DREAPTĂ PARALELĂ (Nr2)

- se știe ec. lui d și a lui d_1, se cere ec. simetricei lui d față de d_1

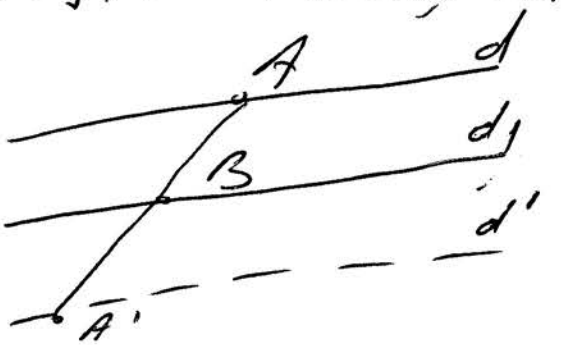


E_1) se calculează $m_d = -\frac{a}{b}$, $m_{d_1} = -\frac{a}{b}$ și dacă se obține $m_d = m_{d_1} \Rightarrow$ simetrica lui d față de d_1 va fi o dreaptă paralelă cu $d \Rightarrow m_{d'} = m_d \Rightarrow m_{d'}$

E_2) Fie $A \in d$ (dăm lui x o valoare, găsim y) și $B \in d_1$ (dăm lui x o valoare, găsim y) și folosim că B mijl lui $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow$ coord lui A'

E_3) știm A', știm $m_{d'} \Rightarrow$ ec. d': $y - y_{A'} = m_{d'}(x - x_{A'})$

Exemplu: Fie $d: 2x + 3y - 6 = 0$, $d_1: 4x + 6y + 1 = 0$. Găsiți ec. simetricei lui d față de d_1



E_1) $m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$; $m_{d_1} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow d \parallel d_1 \Rightarrow d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = -\frac{2}{3}$

E_2) Fie $A \in d$, fie $x_A = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow A(0; 2)$

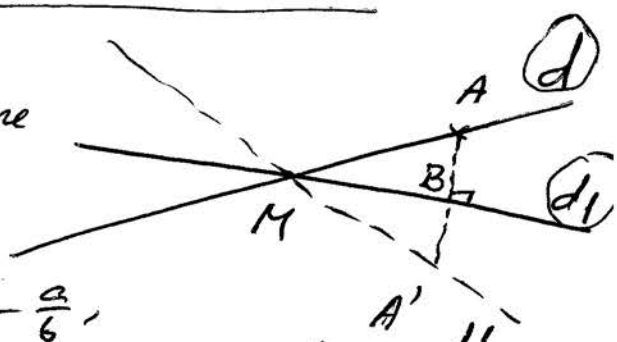
Fie $B \in d_1$, $x_B = 0 \Rightarrow y_B = -\frac{1}{6} \Rightarrow B(0; -\frac{1}{6})$

E_3) B mijl lui $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = \frac{0 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 0 \\ -\frac{1}{6} = \frac{2 + y_{A'}}{2} \Rightarrow -1 = 6 + 3y_{A'} \\ y_{A'} = -\frac{7}{3} \end{array}$

$\Rightarrow A'(0; -\frac{7}{3})$

$\ldots$ v. $\frac{x}{2} = -\frac{2}{3}(x - 0) \mid \cdot 3 \Rightarrow 3y + 7 = -$

DETERMINAREA SIMETRICEI UNEI DR FAȚĂ DE O DREAPTĂ NEPARALELĂ (N2)



-se știe ec. lui d și a lui d_1, se cere ec. simetricei lui d față de d_1

E_1) se calculează $m_d = -\frac{a}{b}$, $m_{d'} = -\frac{a}{b}$, se arată că $m_d \neq m_{d_1}$. Știm d, știm d_1 ⇒ sistem ⇒ (M)

E_2) Fie $A \in d$, găsim ec. perpendicularei din A pe d_1 astfel: $m_{d_1} = -\frac{a}{b}$, $AB \perp d_1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{d_1} = -1 \Rightarrow m_{AB}$, apoi ec. AB cu $y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$, apoi $AB \cap d_1 = \{B\}$ și B mijl AA' ⇒ coord. lui A'

E_3) știm M, știm A' ⇒ ec. MA' cu determinant

Exp: Fie $d: 2x + y - 4 = 0$, $d_1: 3x + 2y - 7 = 0$, găsiți ec. simetricei lui d față de d_1



E_1) $m_d = -\frac{2}{1}$, $m_{d_1} = -\frac{3}{2}$ ⇒ d_1 și d_2 nu sunt ∥ ⇒ sunt concurente, găsim pct lor de intersecție rezolvând sistemul

E_2) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Big| \cdot(-2) \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow M(1; 2)$

E_3) Găsim un punct $A \in d$, fie $x_A = 0 \Rightarrow y_A = 4 \Rightarrow A(0; 4)$

E_4) $AB \perp d_1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{d_1} = -1$, $m_{d_1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_d = \frac{2}{3} \Rightarrow$

ec AB: $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 3y - 12 = 2x \Rightarrow 2x - 3y + 12 = 0$

E_5) nr a găsi coord lui B, sistem $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$

$13x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{13}$

$3 \cdot (-\frac{3}{13}) + 2y = 7 \Big| \cdot 13 \Rightarrow -9 + 26y = 91 \Rightarrow 26y = 100 \Rightarrow y = \frac{50}{13}$

$B(-\frac{3}{13}; \frac{50}{13})$ și B mijl AA' $\Rightarrow -\frac{3}{13} = \frac{0 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = -\frac{6}{13}$, $y_{A'} = \frac{4}{1}$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$ — ecuația ...