Data:

CLASA A X-A

SETUL 3
TRIGONOMETRIE X

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar

GRAFICELE FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE

COMPARAREA VALORILOR FUNCȚIILOR TRIG.

ECUAȚII TRIG. FUNDAMENTALE

ECUAȚII TRIG. DATE PRIN EGALITĂȚI DE FUNCȚII

ECUAȚII TRIG. FUNDAMENTALE

INECUAȚII TRIGONOMETRICE

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

TRASAREA GRAFICULUI FUNCȚIEI (N3)

$f(x) = \sin x$

PROPRIETĂȚI

E_1) $f(x) = \sin x$ este periodică de perioadă $T = 2k\pi$ și perioadă principală $T_0 = 2\pi$

E_2) Facem tabel pe $[0; T_0] = [0; 2\pi]$

x	0				2π
$f(x)$					

E_3) calculăm valorile lui f în punctele de intersecție cu axele (eventual și în alte valori, dacă e cazul)

E_4) situăm punctele în sistemul de axe, le unim folosind că $\pi \approx 3{,}14$ și că $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

E_5) se repetă graficul știind cât de perioada funcției

E_6) se observă că f nu e bijectivă, pt a fi bijectivă se alege restricția sa bijectivă (definită pe un interval ce conține originea sau pe un interval imediat după origine) $\Rightarrow$ $\overline{\sin}: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$ e bijectivă iar inversa e $\arcsin: [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Exp.: trasați graficul funcției $\sin: \mathbb{R} \to [-1;1]$

E_1) $f(x) = \sin x$ e periodică de perioadă $T = 2k\pi$ și perioadă principală $T_0 = 2\pi$

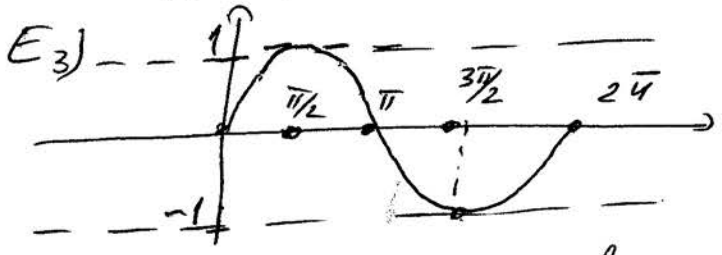
E_2)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

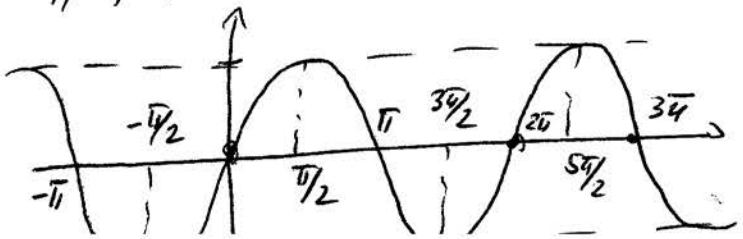
$\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$;

$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$

E_3)



E_4) f periodică cu $T = 2k\pi$



E_5) $f(x) = \sin x$ nu e bijectivă pentru că ducând paralela prin $y \in [-1;1]$ la Ox, acea paralelă va intersecta G_f în mai multe puncte

E_6) alegem restricția bijectivă $\overline{\sin}: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1] \Rightarrow \overline{\sin}$ e inversabilă iar inversa ei este

$\arcsin: [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Obs.: Valorile funcției arcsin trebuie alese din $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Obs 2: Dacă avem $\arcsin x$, trebuie puse condițiile $x \in [-1;1]$

TRASAREA GRAFICULUI FUNCȚIEI (N3)

$f(x) = \cos x$

PROPRIETĂȚI

E_1) $f(x) = \cos x$ este periodică de perioadă $T = 2k\pi$ și perioadă principală $T_0 = 2\pi$

E_2) Facem tabel pe $[0; T_0] = [0; 2\pi]$

x	0				2π
$f(x)$					

E_3) calculăm valorile lui f în punctele de intersecție cu axele (eventual și în alte valori, dacă e cazul)

E_4) situăm punctele în sistemul de axe, le unim folosind că $\pi \approx 3{,}14$ și că $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

E_5) se repetă graficul ținând cont de perioada funcției

E_6) se observă că f nu e bijectivă pt a fi bijectivă se alege restricția sa bijectivă (definită pe un interval ce conține originea sau pe un interval imediat după origine) $\Rightarrow$ $\overline{\cos}: [0; \pi] \to [-1; 1]$ e bijectivă iar inversa e $\arccos: [-1; 1] \to [0; \pi]$

Exp.: trasați graficul funcției $\cos: \mathbb{R} \to [-1; 1]$

E_1) $f(x) = \cos x$ e periodică de perioadă $T = 2k\pi$ și perioadă principală $T_0 = 2\pi$

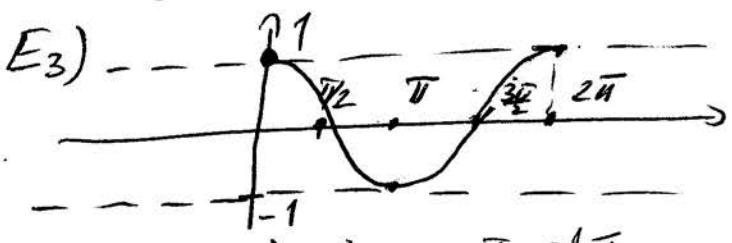
E_2)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

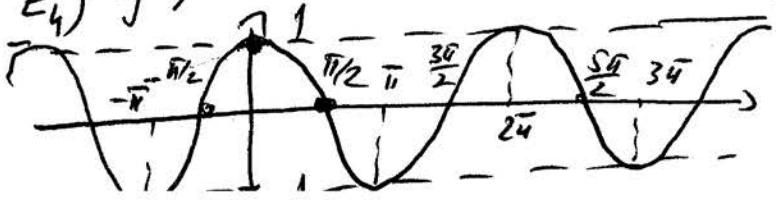
$\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$,

$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ și $\cos 2\pi = 1$

E_3)



E_4) f periodică cu $T = 2k\pi$



E_5) $f(x) = \cos x$ nu e bijectivă pentru că ducând paralele pe $y \in [-1; 1]$ la Ox, acea paralelă va intersecta G_f în mai multe puncte

E_6) alegem restricție bijectivă $\overline{\cos}: [0; \pi] \to [-1; 1] \Rightarrow \overline{\cos}$ e inversabilă iar inversa ei este $\arccos: [-1; 1] \to [0; \pi]$

Obs.: Valorile funcției $\arccos x$ trebuie alese din $[0; \pi]$

Obs2: Dacă avem $\arccos x$, trebuie puse condițiile $x \in [-1; 1]$

TRASAREA GRAFICULUI FUNCȚIEI (N3)

$f(x) = \operatorname{tg} x$

PROPRIETĂȚI

E_1) $f(x) = \operatorname{tg} x$ este periodică de perioadă $T = k\pi$ și perioadă principală $T_0 = \pi$.

E_2) Facem tabel pe $[0; T_0] = [0; \pi]$

x	0		π
$f(x)$			

E_3) calculăm valorile lui f în punctele de intersecție cu axele (eventual și în alte valori, dacă e cazul), în cazul nostru și în $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{3\pi}{4}$

E_4) situăm punctele în sistemul de axe, le unim folosind că $\pi \approx 3{,}14$ și că $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

E_5) se repetă graficul ținând cont de perioada funcției

E_6) se observă că f nu e bijectivă pt a fi bijectivă se alege restricția sa bijectivă (definită pe un interval ce conține originea sau pe un interval imediat după origine) $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ e bijectivă iar inversa e $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Exp.: trasați graficul funcției $\operatorname{tg} : D \to \mathbb{R}$

E_1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, cond.; $\cos x \neq 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2}, \dots\} \Rightarrow$

$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

E_2) $f(x) = \operatorname{tg} x$ e periodică de perioadă $T = k\pi$ și perioadă principală $T_0 = \pi$

E_3)

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
$\operatorname{tg} x$	0		1		$\setminus$		-1		0

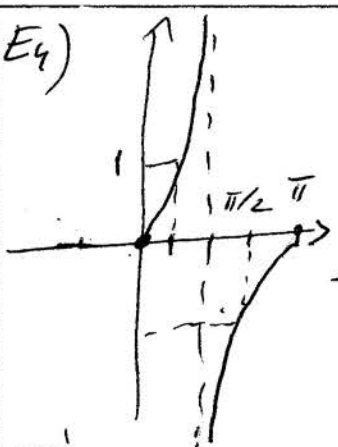
$\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$; $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$; $\operatorname{tg} \pi/2 = \frac{1}{0} = \setminus$

$\operatorname{tg} 3\pi/4 = \frac{\sin 135°}{\cos 135°} = -1$; $\operatorname{tg} \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = 0$

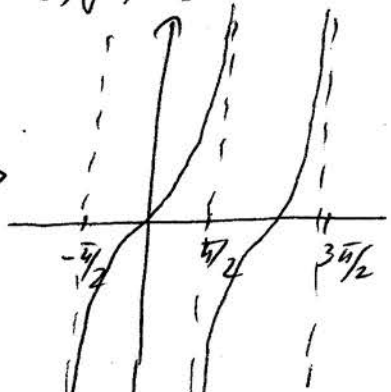
unde $\sin 135° = \sin(90° + 45°) = \dots$ și

analog $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = \dots$

E_4)



E_5) f periodică



E_5) $f(x) = \operatorname{tg} x$ nu e bijectivă pt că ducând paralela $\sin y \in \mathbb{R}$ la Ox, ac paralelă va intersecta G_f în mai mult puncte

E_6) alegem restricția bijectivă

$\operatorname{Tg} : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Tg}$ e inversabilă cu inversa ei $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Obs 1: valorile funcției $\operatorname{arctg} x$ trebuie alese din $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Obs 2: dacă avem $\operatorname{arctg} x$, nu trebuie puse condiții deoarece domeniul său este $\mathbb{R}$

TRASAREA GRAFICULUI FUNCȚIEI

$f(x) = ctg\, x$

(N3)

PROPRIETĂȚI

E_1) $f(x) = ctg\, x$ este periodică de perioadă $T = k\pi$ și perioadă principală $T_0 = \pi$

E_2) Lucrăm tabel pe $[0; T_0] = [0; \pi]$

x	0		π
$f(x)$	$\nexists$		$\nexists$

E_3) calculăm valorile lui f în punctele de intersecție cu axele (eventual și în alte valori, dacă e cazul)

E_4) situăm punctele în sistemul de axe, le unim folosind că $\pi \approx 3{,}14$ și că $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

E_5) se repetă graficul ținând cont de perioada funcției

E_6) se observă că f nu e bijectivă pt a fi bijectivă se alege restricția sa bijectivă (definită pe un interval ce conține originea sau pe un interval imediat după origine) $\Rightarrow$ $ctg : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ este bijectivă iar inversa e $arcctg : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

Exp.: trasați graficul funcției $ctg : \Delta \to \mathbb{R}$

E_1) $ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, cond.: $\sin x \neq 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi; 2\pi; 3\pi; \dots\} \Rightarrow$

$ctg : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

E_2) $f(x) = ctg\, x$ e periodică de perioadă $T = k\pi$ și perioadă principală $T_0 = \pi$

E_3)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$ctg\, x$	$\nexists$	1	0	-1	$\nexists$

$ctg\, 0 = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \nexists$; $ctg\, \pi/4 = 1$; $ctg\, \pi/2 = 0$;

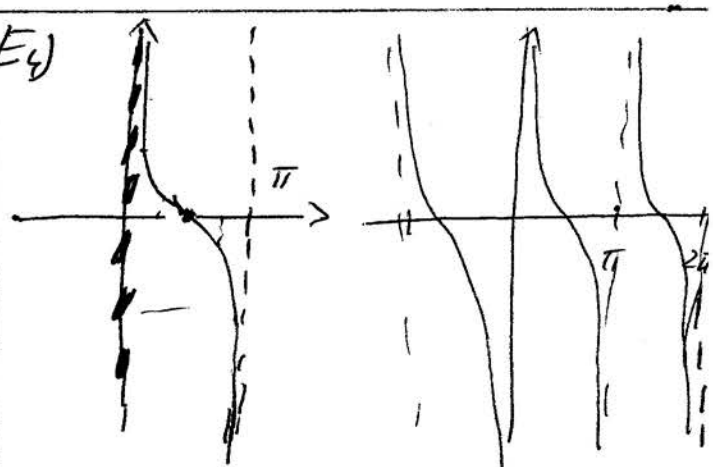
$ctg\, \frac{3\pi}{4} = -1$; $ctg\, \pi = \frac{\cos \pi}{\sin \pi} = \frac{-1}{0} = \nexists$

unde $ctg\, \frac{3\pi}{4} = ctg\, 135° = \frac{\cos 135°}{\sin 135°}$

iar $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = \dots$ și

$\sin 135° = \sin(90° + 45°) = \dots$

E_4)



E_5) $f(x) = ctg\, x$ nu e bijectivă pt că ducând paralelă prin $y \in \mathbb{R}$ la Ox, acea paralelă va intersecta G_f în mai multe puncte

E_6) alegem restricția bijectivă $ctg : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, ctg e inversabilă cu inversa ei $arcctg : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

Obs: valorile funcției $arcctg\, x$ trebuie alese din $(0, \pi)$

Obs 2: dacă avem $arcctg\, x$, nu trebuie puse condiții deoarece domeniul său este $\mathbb{R}$

COMPARAREA VALORILOR FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE (N2)

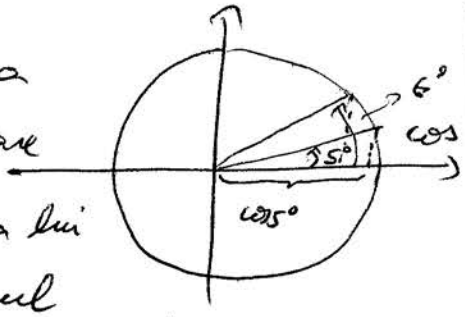
E_1) dacă argumentul este dat în grade, se compară din cercul trigonometric

E_2) dacă argumentul este dat în radiani, se face graficul funcției și se compară valorile funcției prin lungimea perpendicularei pe Ox de la Ox până la grafic, ținând cont bineînțeles de semn

---

Exp 1.: comparați $\cos 5^\circ$ cu $\cos 6^\circ$

E_1) valoarea corespunzătoare lui $\cos 5^\circ$ sau a lui $\cos 6^\circ$ este x-ul corespunzător unghiului



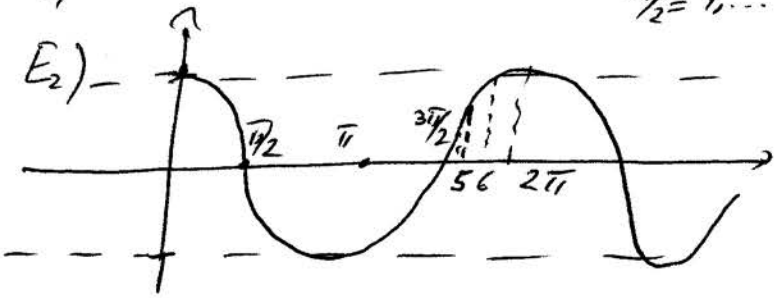
E_2) $\Rightarrow$ $\boxed{\cos 5^\circ > \cos 6^\circ}$

Exp 2: comparați $\cos 5$ cu $\cos 6$

E_1) trasăm graficul lui $\cos x$ ținând cont că $\pi \approx 3,14 \Rightarrow 2\pi \approx 6,28$

$3\pi/2 = 4,\ldots$

E_2)

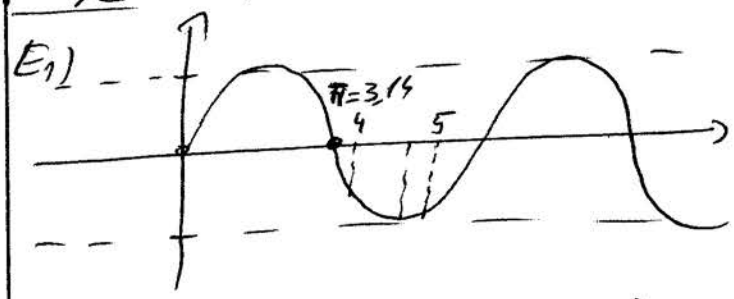


E_3) prin $x=5$ și $x=6$ ducem $\perp$ pe Ox și observăm că lungimea $\perp$ în $x=5$ este mai mică decât în $x=6$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sin 5 < \cos 6}$

Exp 3: Comparați $\sin 4$ cu $\sin 5$

E_1)



$\pi = 3,14$, $3\pi/2 = 4,71 \Rightarrow 5$ este mai aproape de $3\pi/2$ decât 4 de $3\pi/2$

$\Rightarrow$ lung perpend în $x=4$ este mai mică decât în $x=5$

dar ambele sunt negative

$\Rightarrow \sin 4 > \sin 5$

CALCULUL FUNCȚIILOR TRIG INVERSE

E_1) se folosește $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

E_2) se ține cont că $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos x \in [0; \pi]$

$\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{arcctg} x \in (0; \pi)$

E_3] valorile sunt exprimate în radiani

Exp: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ pt că $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\arccos 1 = 0$ pt că $\cos 0 = 1$

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ pt că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ pt că $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

PARITATEA, IMPARITATEA FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE INVERSE

(N2)

1) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

3) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

4) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

Obs1: dacă apar doi de „c" ca la arccos și arcctg, atunci formula este „π – funcția respectivă"

Obs2: dacă nu apar doi de „c" ci doar unul singur de la arc ca la arcsin și arctg, atunci formula este „– funcția respectivă"

Exp1: calculați $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

E_1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

E_2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = y$ cu $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E_3) deoarece $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$ valoare corectă

E_4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Exp2: calculați $\arccos(-1)$

E_1) $\arccos(-1) = \pi - \arccos 1$

E_2) $\arccos 1 = y$ cu $\cos y = 1$

E_3) deoarece $\cos 0 = 1$ și $0 \in [0, \pi]$

$\Rightarrow y = 0$ valoare corectă

E_4) $\arccos(-1) = \pi - 0 = \pi$

Exp3: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$

E_1) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3}$

E_2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = y$ cu $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$

E_3) deoarece $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ și $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$ valoare corectă

E_4) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

Exp4: $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$

E_1) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$

E_2) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = y$ cu $\operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$

E_3) deoarece $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ și $\frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$ valoare corectă

E_4) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

RELAȚIA ÎNTRE O FUNCȚIE TRIGON ȘI INVERSA SA

(N3)

1) $\sin(\arcsin x)=x, \forall x\in[-1;1]$

2) $\arcsin(\sin x)=x, \forall x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

3) $\cos(\arccos x)=x, \forall x\in[-1;1]$

4) $\arccos(\cos x)=x, \forall x\in[0;\pi]$

5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x, \forall x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

7) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

8) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x, \forall x\in(0;\pi)$

---

9) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, \forall x\in[-1;1]$

10) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, \forall x\in[-1;1]$

11) $\nexists \arccos(\sin x)$

12) $\nexists \arcsin(\cos x)$

13) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}$

14) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}$

15) $\nexists \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$

16) $\nexists \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$

---

dem. pentru $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

$E_1)$ $\sin^2 t+\cos^2 t=1 \Rightarrow \sin^2 t=1-\cos^2 t$

$\Rightarrow \sin t=\pm\sqrt{1-\cos^2 t}, \forall t \Rightarrow$ pt $t=\arccos x$

$E_2)$ $\sin(\arccos x)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=$

$=\pm\sqrt{1-x^2}$

$E_3)$ cum $\arccos:[-1;1]\to[0;\pi] \Rightarrow$

$\arccos x\in[0;\pi] \Rightarrow \sin(\arccos x)\geq 0$

$\Rightarrow \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

Analog deducem $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

dem. pt $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_2)$ $\operatorname{ctg} t=\frac{1}{\operatorname{tg} t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}$

Analog deducem $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x}$

Ex 1: calculați $\sin(\arccos\frac{1}{3})$

$E_1)$ $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

$E_2)$ $\sin(\arccos\frac{1}{3})=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$

$\Rightarrow \sin(\arccos\frac{1}{3})=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Ex 2: găsiți semnul pentru $\operatorname{ctg}(-\operatorname{arctg}\frac{1}{5})$

$E_1)$ $\operatorname{ctg}(-\operatorname{arctg}\frac{1}{5})=\pi-\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{5})$

$E_2)$ Dar, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x} \Rightarrow$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{5})=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$

$E_3)$ $\operatorname{ctg}(-\operatorname{arctg}\frac{1}{5})=\pi-5<0$

FORMULE PENTRU FUNCȚII TRIG. INVERSE (N3)

1) $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}$

2) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a+b}{1-ab}$

dem:

1) E_1) din $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ | $\operatorname{arctg}(\dots)$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x-y)) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

E_2) Dar, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x-y)) = x-y$

$\Rightarrow x-y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

E_3) notăm $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} a \\ y = \operatorname{arctg} b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a \\ \operatorname{tg} y = b \end{cases}$ și înlocuim

E_4) $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}$

2) cealaltă formulă se demonstrează analog folosind $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

Exp: arătați că $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+x+1}$

E_1) $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}$

E_2) $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{x+1-x}{1+(x+1)\cdot x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2+x}$

DEDUCEREA DIN CERCUL TRIGONOMETRIC A VALORILOR UNGHIURILOR ASOCIATE TABELULUI TRIGONOMETRIC

(N2)

1) $\cos x = a$, a din tabel

E_1) alegem a pe Ot, ducem $\perp$ până în cercul și vedem dacă în sens cu axa Oy e $\measuredangle$ mic, mijloc sau mare $\Rightarrow$ folosim $\pi/6$, $\pi/4$ sau $\pi/3$ și axe

E_2) cealaltă valoare din simetrie

2) $\sin x = a$, a din tabel

E_1) alegem a pe Oy, ducem $\perp$ până în cercul și vedem dacă în sens cu Ot e $\measuredangle$ mic, mijloc sau mare $\Rightarrow$ folosim $\pi/6$, $\pi/4$ sau $\pi/3$ și axe

E_2) cealaltă valoare din simetrie

3) $\operatorname{tg} x = a$, a din tabel

E_1) deducem $\sin x$ și îl situăm pe cerc ținând cont de semnul lui a ($a<0 \Rightarrow$ Cd II sau Cd IV; $a>0 \Rightarrow$ Cd I sau Cd III)

E_2) deducem x și cealaltă valoare este $(x+\pi)$

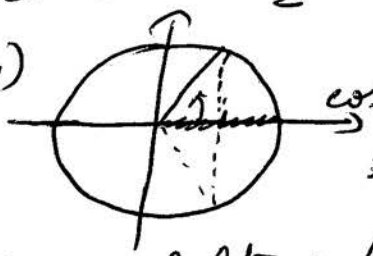
4) $\operatorname{ctg} x = a$, a din tabel

E_1) deducem $\cos a$ și îl situăm pe cerc ținând cont de semnul lui a ($a<0 \Rightarrow$ Cd II sau Cd IV; $a>0 \Rightarrow$ Cd I sau Cd III)

E_2) deducem x și cealaltă valoare este $(x+\pi)$

Ex 1: $\cos x = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$

E_1)



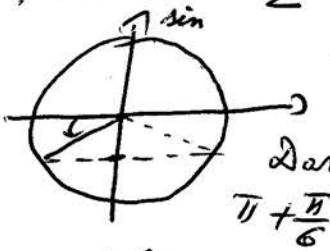
x cerut este mare $\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{3}$

E_2) cealaltă valoare $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

Ex 2: $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$

E_1)



x cerut în sens e mic $\Rightarrow \frac{\pi}{6}$

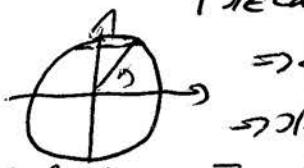
Dar final, $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

E_2) cealaltă valoare e $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Ex 3: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $x \in [0, 2\pi)$

E_1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in \text{Cd I sau } x \in \text{Cd III} \end{cases}$

E_2)



$\Rightarrow x$ este mare $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

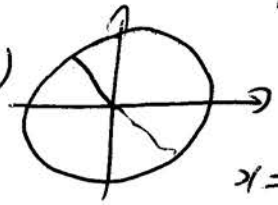
celălalt $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow x \in \left\{\pi/3; 4\pi/3\right\}$

Ex 4: $\operatorname{ctg} x = -1$, $x \in [0, 2\pi)$

E_1) $\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in \text{Cd II sau } x \in \text{Cd IV} \end{cases}$

E_2)



x mijloc $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4}$

celălalt $\frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow x \in \left\{3\pi/4; 7\pi/4\right\}$

ECUAȚII TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE (N3)

TIP I: $\boxed{\sin x = a}$

dacă $a \notin [-1;1] \Rightarrow x \in \emptyset$ (ec nu are soluții)

dacă $a \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$\boxed{x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

Obs.: dacă $a \in [-1;1] \Rightarrow$ soluția se mai poate scrie

$x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

TIP II: $\boxed{\cos x = a}$

dacă $a \notin [-1;1] \Rightarrow x \in \emptyset$ (ec nu are soluții)

dacă $a \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$\boxed{x \in \{\arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

TIP III: $\boxed{\operatorname{tg} x = a}$ are soluții $\forall x \in \mathbb{R}$ de forma $\boxed{x \in \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

TIP IV: $\boxed{\operatorname{ctg} x = a}$ are soluții $\forall x \in \mathbb{R}$ de forma $\boxed{x \in \{\operatorname{arcctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

Obs.: dacă se cer soluții dintr-un interval, dăm lui k valori în jurul lui $k=0$ (de obicei $k=-1, k=0, k=1$ etc) astfel încât să nu avem nicio soluție pt prima valoare a lui k, apoi dăm valori lui k cât avem soluții și ne oprim atunci când iarăși nu avem soluții

Obs 2: dacă se cer soluții din $\mathbb{R}$, atunci nu mai dăm valori și soluția rămâne așa cum este

---

Exp 1: rezolvați în $\mathbb{R}$: $\sin x = \frac{1}{2}$

E1) $\frac{1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$x \in \{\arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E3) $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exp 2: rezolvați în $\mathbb{R}$: $\cos x = -\frac{1}{2}$

E1) $-\frac{1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$x \in \{\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

E3) $x \in \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exp 3: rezolv în $[0; 2\pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

E1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$x \in \{\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$

E3) $x \in \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$x \in \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E4) se cer soluții din $[0; 2\pi] \Rightarrow$ dăm valori

$k=-1 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3} - 2\pi;\ \frac{4\pi}{3} - 2\pi\} \cap [0; 2\pi] = \emptyset$

$k=0 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{4\pi}{3}\}$

$k=1 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3} + 2\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi\} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{5\pi}{3}\}$

$k=2 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3} + 4\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 4\pi\} \cap [0; 2\pi] = \emptyset$

Exp 4: rezolvați în $\mathbb{R}$: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

E1) $x \in \{\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

E3) $x \in \{-\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exp 5: rezolvați în $[-2\pi; \pi]$: $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

E1) $x \in \{\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

E3) $x \in \{\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E4) se cer soluții din $[-2\pi; \pi] \Rightarrow$ dăm valori

$k=-1 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} - \pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \{-\frac{\pi}{6}\}$

s-ar putea ca și valori ale lui k mai mici să avem soluții, studiem asta

$k=-2 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} - 2\pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \{-\frac{7\pi}{6}\}$

$k=-3 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} - 3\pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \emptyset$ deci valori mai mici ale lui k nu dau soluții

$k=0 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6}\} \cap [-2\pi; \pi] = \{\frac{5\pi}{6}\}$

$k=1 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} + \pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \emptyset$ deci valori mai mari nu dau soluții

E5) S_f: $x \in \{-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\}$

Obs: s-a folosit în rezolvare:

a) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

b) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

c) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

d) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

REZOLVARE DE EC. TRIGONOMETRICE DATE PRIN EGALITĂȚI DE FUNCȚII

(N2)

TIP I: $\boxed{\sin f(x) = \sin g(x)}$, din care deducem $f(x) = g(x) + 2k\pi$ sau $f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$ (se reunesc soluțiile)
- se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie sub formă de reuniuni de mulțimi

TIP II: $\boxed{\cos f(x) = \cos g(x)}$, din care deducem $f(x) = g(x) + 2k\pi$ sau $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ (se reunesc soluțiile)
- se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie sub formă de reuniuni de mulțimi

TIP III: $\boxed{\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)} \Rightarrow$
$f(x) = g(x) + k\pi$, se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie ca și mulțime soluția

TIP IV: $\boxed{\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)} \Rightarrow$
$f(x) = g(x) + k\pi$, se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie ca și mulțime soluția

OBS 1: dacă se cere rezolvarea $\sin f(x) = \cos g(x)$, scriem una din funcții în funcție de cealaltă folosind $\sin f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$ sau că $\cos g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$

OBS 2: dacă se cere rezolvarea $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$, scriem una din funcții în funcție de cealaltă folosind $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$ sau că $\operatorname{ctg} g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$

OBS 3: dacă se cere rezolvarea unei ec. din tipurile de mai sus într-un interval, dăm lui k valori în jurul lui $k=0$ (de obicei $k=-1$, $k=0$, $k=1$ ...) și alegem doar soluțiile convenabile

---

Exemplu 1: rezolv în $\mathbb{R}$: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

E_1) $2x + \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ sau $2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

E_2) $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ sau $3x = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ sau $x = \frac{\frac{3\pi}{6} + 2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

E_3) $x \in \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplu 2: rezolv în $[0, \pi]$: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

E_1) $3x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sau $3x + \frac{\pi}{4} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$

E_2) $2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sau $4x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}$ sau $x = \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}$

E_3) $x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

E_4) se cer sol din $[0, \pi]$, dăm valori

$k = -1 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} - \pi; -\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{2}\right\} \cap [0, \pi] = \emptyset$

$k = 0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{16}\right\} \cap [0, \pi] = \emptyset$

$k = 1 \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{16}\right\}$

$k = 2 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} + 2\pi; -\frac{\pi}{16} + \pi\right\} \cap [0, \pi] = \left\{\frac{15\pi}{16}\right\}$

$k = 3 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} + 3\pi; -\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right\} \cap [0, \pi] = \emptyset$

E_4) S_f: $x \in \left\{\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{16}; \frac{15\pi}{16}\right\}$

Exemplu 3: rezolv în $\mathbb{R}$: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

E_1) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right)$

E_2) ec. este: $\sin\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

E_3) $-3x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sau $-3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$

E_4) $-4x = -\frac{2\pi}{4} + 2k\pi$ sau $-2x = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi$

E_5) $x = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{-4}$ sau $x = \frac{\pi + k\pi}{-2}$

E_6) $x \in \left\{\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplu 4: rezolv în $\mathbb{R}$: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

E_1) $x + \frac{\pi}{3} = 3x + \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{12} - k\pi}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplu 5: rezolv în $\mathbb{R}$: $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{4} = 3x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - k\pi$

$\Rightarrow 2x = -\frac{3\pi}{4} - k\pi \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

REZOLVAREA ECUAȚIILOR $a\cos x + b\sin x = c$ PRIN METODA UNGHIULUI DIN TABEL (N2)

- nu e metodă generală, însă e prima metodă care se încearcă deoarece e cea mai simplă

$E_1)$ $a\cos x + b\sin x = c \mid : \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$E_2)$ Dacă putem găsi un unghi φ din tabel astfel încât $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ și $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, metoda se poate folosi, altfel nu putem folosi această metodă

$E_3)$ Dacă există φ din tabel, ecuația devine:

$\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$E_4)$ dacă $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1] \Rightarrow$ ecuația nu are soluții

dacă $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1] \Rightarrow$ soluția este

$x-\varphi \in \{\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow x \in \{\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \varphi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \varphi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Ex1: Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -1$

$E_1)$ $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -1 \mid : \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$

$E_2)$ $\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$E_3)$ $-\frac{1}{2} \in [-1,1] \Rightarrow$ ec are soluție, $x-\frac{\pi}{6} \in \{\pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$E_4)$ $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$E_5)$ $x-\frac{\pi}{6} \in \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$x \in \{\pi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$